



Imię i nazwisko autora rozprawy: Damian Trofimowicz
Dyscyplina naukowa: Automatyka, Elektronika i Elektrotechnika

ROZPRAWA DOKTORSKA

Tytuł rozprawy w języku polskim: Zastosowania Pochodnych Ułamkowych w Elektromagnetyzmie i Teorii Obwodów

Tytuł rozprawy w języku angielskim: Applications of Fractional Derivatives in Electromagnetism and Circuit Theory

Promotor

podpis

dr hab. inż. Tomasz Stefański

Gdańsk, rok 2026



OŚWIADCZENIE

Autor rozprawy doktorskiej: Damian Trofimowicz

Ja, niżej podpisany(a), oświadczam, iż jestem świadomy(a), że zgodnie z przepisem art. 27 ust. 1 i 2 ustawy z dnia 4 lutego 1994 r. o prawie autorskim i prawach pokrewnych (t.j. Dz.U. z 2021 poz. 1062), uczelnia może korzystać z mojej rozprawy doktorskiej zatytułowanej:
„Zastosowania Pochodnych Ułamkowych w Elektromagnetyzmie i Teorii Obwodów” do prowadzenia badań naukowych lub w celach dydaktycznych.

Świadomy(a) odpowiedzialności karnej z tytułu naruszenia przepisów ustawy z dnia 4 lutego 1994 r. o prawie autorskim i prawach pokrewnych i konsekwencji dyscyplinarnych określonych w ustawie Prawo o szkolnictwie wyższym i nauce (Dz.U.2021.478 t.j.), a także odpowiedzialności cywilno-prawnej oświadczam, że przedkładana rozprawa doktorska została napisana przeze mnie samodzielnie.

Oświadczam, że treść rozprawy opracowana została na podstawie wyników badań prowadzonych pod kierunkiem i w ścisłej współpracy z promotorem dr hab. inż. Tomaszem Stefańskim.

Niniejsza rozprawa doktorska nie była wcześniej podstawą żadnej innej urzędowej procedury związanej z nadaniem stopnia doktora.

Wszystkie informacje umieszczone w ww. rozprawie uzyskane ze źródeł pisanych i elektronicznych, zostały udokumentowane w wykazie literatury odpowiednimi odnośnikami, zgodnie z przepisem art. 34 ustawy o prawie autorskim i prawach pokrewnych.

Potwierdzam zgodność niniejszej wersji pracy doktorskiej z załączoną wersją elektroniczną.

Gdańsk, dnia.....

.....
podpis doktoranta

Ja, niżej podpisany(a), wyrażam zgodę/nie wyrażam zgody* na umieszczenie ww. rozprawy doktorskiej w wersji elektronicznej w otwartym, cyfrowym repozytorium instytucjonalnym Politechniki Gdańskiej.

Gdańsk, dnia.....

.....
podpis doktoranta

**niepotrzebne usunąć*

¹Art. 27. 1. Instytucje oświatowe oraz podmioty, o których mowa w art. 7 ust. 1 pkt 1, 2 i 4–8 ustawy z dnia 20 lipca 2018 r. – Prawo o szkolnictwie wyższym i nauce, mogą na potrzeby zilustrowania treści przekazywanych w celach dydaktycznych lub w celu prowadzenia działalności naukowej korzystać z rozpowszechnionych utworów w oryginale i w tłumaczeniu oraz zwielokrotnić w tym celu rozpowszechnione drobne utwory lub fragmenty większych utworów.

2. W przypadku publicznego udostępniania utworów w taki sposób, aby każdym mógł mieć do nich dostęp w miejscu i czasie przez siebie wybranym korzystanie, o którym mowa w ust. 1, jest dozwolone wyłącznie dla ograniczonego kręgu osób uczących się, nauczających lub prowadzących badania naukowe, zidentyfikowanych przez podmioty wymienione w ust. 1.



OPIS ROZPRAWY DOKTORSKIEJ

Autor rozprawy doktorskiej: Damian Trofimowicz

Tytuł rozprawy doktorskiej w języku polskim: Zastosowania Pochodnych Ułamkowych w Elektromagnetyzmie i Teorii Obwodów

Tytuł rozprawy w języku angielskim: Applications of Fractional Derivatives in Electromagnetism and Circuit Theory

Język rozprawy doktorskiej: polski

Promotor rozprawy doktorskiej: dr hab. inż. Tomasz Stefański

Data obrony:

Słowa kluczowe rozprawy doktorskiej w języku polskim: Systemy ułamkowego rzędu, równania przestrzeni stanów, pochodna Marchaud, pochodna Grünwalda-Letnikova, równania Maxwella, teoria sterowania, elektromagnetyzm, teoria obwodów

Słowa kluczowe rozprawy doktorskiej w języku angielskim: Fractional-order systems, state-space equations, Marchaud derivative, Grünwald-Letnikov derivative, Maxwell's equations, control theory, electromagnetism, circuit theory

Streszczenie rozprawy w języku polskim: W niniejszej rozprawie doktorskiej omówiono koncepcje pochodnych ułamkowego rzędu z punktu widzenia zastosowań w elektromagnetyzmie i teorii obwodów. Sformułowano właściwości pochodnych ułamkowego rzędu niezbędne do modelowania systemów elektromagnetycznych i obwodów elektrycznych. Przeprowadzono analizę której rezultaty wskazują, że pochodna ułamkowego rzędu oparta o definicję Marchaud nie narusza podstawowych zasad modelowania systemów elektromagnetycznych i obwodów elektrycznych. Oprócz tego, wskazano zakres rzędu pochodnej ułamkowej, który zapewnia zgodność definicji Marchaud z definicją Grünwalda-Letnikova. Dzięki temu możliwe było zaproponowanie nowych metod symulacji elektromagnetycznych, które opierają się na teorii systemów ułamkowego rzędu stosujących pochodną Grünwalda-Letnikova.

Streszczenie rozprawy w języku angielskim: This doctoral dissertation discusses the concept of fractional-order derivatives from the perspective of applications in electromagnetism and circuit theory. The properties of fractional-order derivatives necessary for modeling electromagnetic systems and electrical circuits were formulated. An analysis was conducted, the results of which indicate that the fractional-order derivative based on Marchaud's definition does not violate the fundamental principles of modeling electromagnetic systems and electrical circuits. In addition, the range of order of the fractional derivative was determined, which ensures the consistency of the Marchaud definition with the Grünwald-Letnikov definition. This made it possible to propose novel electromagnetic simulation methods based on the theory of fractional-order systems using the Grünwald-Letnikov derivative

STRESZCZENIE

W niniejszej rozprawie doktorskiej omówiono koncepcje pochodnych ułamkowego rzędu z punktu widzenia zastosowań w elektromagnetyzmie i teorii obwodów. Sformułowano właściwości pochodnych ułamkowego rzędu niezbędne do modelowania systemów elektromagnetycznych i obwodów elektrycznych. Przeprowadzono analizę której rezultaty wskazują, że pochodna ułamkowego rzędu oparta o definicję Marchaud nie narusza podstawowych zasad modelowania systemów elektromagnetycznych i obwodów elektrycznych. Oprócz tego, wskazano zakres rzędu pochodnej ułamkowej, który zapewnia zgodność definicji Marchaud z definicją Grünwalda-Letnikova. Dzięki temu możliwe było zaproponowanie nowych metod symulacji elektromagnetycznych, które opierają się na teorii systemów ułamkowego rzędu stosujących pochodną Grünwalda-Letnikova.

Słowa kluczowe: Systemy ułamkowego rzędu, równania przestrzeni stanów, pochodna Marchaud, pochodna Grünwalda-Letnikova, równania Maxwella, teoria sterowania, elektromagnetyzm, teoria obwodów.

Dziedzina nauki i techniki, zgodnie z wymogami OECD: nauki inżynierskie i techniczne, elektronika i telekomunikacja

ABSTRACT

This doctoral dissertation discusses the concept of fractional-order derivatives from the perspective of applications in electromagnetism and circuit theory. The properties of fractional-order derivatives necessary for modeling electromagnetic systems and electrical circuits were formulated. An analysis was conducted, the results of which indicate that the fractional-order derivative based on Marchaud's definition does not violate the fundamental principles of modeling electromagnetic systems and electrical circuits. In addition, the range of order of the fractional derivative was determined, which ensures the consistency of the Marchaud definition with the Grünwald-Letnikov definition. This made it possible to propose novel electromagnetic simulation methods based on the theory of fractional-order systems using the Grünwald-Letnikov derivative.

Keywords: Fractional-order systems, state-space equations, Marchaud derivative, Grünwald-Letnikov derivative, Maxwell's equations, control theory, electromagnetism, circuit theory.

PODZIĘKOWANIA

Serdecznie dziękuję mojemu promotorowi, prof. Tomaszowi Stefańskiemu, za cierpliwość i merytoryczne wsparcie, które towarzyszyło mi na każdym etapie pisania tej pracy. Pańska wiedza i zaangażowanie były dla mnie nieocenioną pomocą i inspiracją. Bez Pańskiego wsparcia nie udałooby się osiągnąć celu.

Serdecznie dziękuję prof. Jackowi Gulgowskiemu za wybitny wkład wiedzy matematycznej w realizację tej pracy. Pańska dogłębna ekspertyza, skrupulatność i kreatywne podejście do problemów są nieocenione i znacząco podniosły poziom merytoryczny niniejszej rozprawy doktorskiej.

Dziękuję mojej rodzinie i przyjaciołom za wsparcie, motywację i wyrozumiałość w trakcie pisania pracy.

SPIS TREŚCI

Wykaz ważniejszych oznaczeń i skrótów	9
1 Wprowadzenie	10
1.1 Przedmowa	10
1.2 Motywacja do badań	11
1.3 Cel i teza pracy	14
1.4 Plan pracy	15
2 Pochodne ułamkowego rzędu	17
2.1 Podstawowe definicje i właściwości pochodnych ułamkowego rzędu niezbędne do zastosowań w elektromagnetyzmie i teorii obwodów	18
2.2 Podstawowe definicje pochodnych ułamkowego rzędu	21
2.2.1 Definicja Riemanna-Liouville'a	22
2.2.2 Definicja Caputo	22
2.2.3 Definicja Liouville'a-Caputo	23
2.2.4 Definicja Liouville'a	24
2.2.5 Definicja Marchaud	25
2.2.6 Definicja Grünwalda-Letnikova	26
2.2.7 Pochodne nieklasyczne	27
3 Zastosowanie pochodnej Marchaud w elektromagnetyzmie i teorii obwodów	29
3.1 Równania Maxwella w ośrodkach opisanych przez modele całkowitego rzędu	30
3.2 Równania Maxwella w mediach opisanych przez modele ułamkowego rzędu	33
3.3 Elektromagnetyzm i elementy obwodów ułamkowego rzędu	37
3.3.1 Rezystor	37
3.3.2 Kondensator	38
3.3.3 Cewka	40
3.4 Metoda energetyczna wyznaczania parametrów elementów skupionych ułamkowego rzędu	42
3.4.1 Kondensator	42
3.4.2 Cewka	42
3.5 Linie transmisyjne ułamkowego rzędu	42
3.5.1 Równania telegrafistów ułamkowego rzędu	45

4	Metody rozwiązywania zagadnień elektromagnetyzmu i teorii obwodów opisanych równaniami różniczkowo-całkowymi ułamkowego rzędu	47
4.1	Metoda rozwiązywania równań linii transmisyjnej	47
4.2	Metody rozwiązywania równań opisujących propagację fal elektromagnetycznych w ośrodkach o ułamkowych relacjach konstytutywnych	49
4.2.1	Rozwiązania analityczne z czasem ciągłym	49
4.2.2	Rozwiązania analityczne z czasem dyskretnym	55
4.2.3	Metoda różnic skończonych w dziedzinie czasu (FDTD)	63
4.2.4	Metoda różnic skończonych Cranka-Nicolsona w dziedzinie czasu (CN-FDTD) .	73
5	Podsumowanie pracy	78
	Wykaz literatury	83
	Wykaz rysunków	91
	Wykaz tabel	93
	Dodatek A	94

WYKAZ WAŻNIEJSZYCH OZNACZEŃ I SKRÓTÓW

$\mathbb{C}$ – zbiór liczb zespolonych

$\mathbb{N}$ – zbiór liczb naturalnych

$\mathbb{R}$ – zbiór liczb rzeczywistych

L^p – zbiór funkcji całkowalnych z p -tą potęgą wartości bezwzględnej

D^α – operator pochodnej niecałkowitego rzędu

$E_{\alpha,\beta}(z)$ – uogólniona funkcja Mittag-Lefflera

$E_\alpha(z)$ – jednoparametrowa funkcja Mittag-Lefflera

$j = \sqrt{-1}$ – jednostka urojona

AG – ang. *average gradient* – średni gradient

CFL – ang. Courant-Friedrich-Lewy – warunek stabilności Couranta-Friedricha-Lewy’ego

CN-FDTD – ang. *Crank-Nicolson finite-difference time-domain* – różnice skończone w dziedzinie czasu oparte o schemat Cranka-Nicolsona

EKG – elektrokardiografia

EME – ang. *measure of enhancement* – miara wzmocnienia

IE – ang. *information entropy* – entropia informacyjna

FDTD – ang. *finite-difference time-domain* – różnice skończone w dziedzinie czasu

FFT – ang. *fast Fourier transformation* – szybka transformacja Fouriera

GRPF – ang. *global roots and poles finding* – globalne znajdowanie pierwiastków i biegunów zespolonych

PC – ang. *personal computer* – komputer osobisty

PEC – ang. *perfect electric conductor* – idealny przewodnik elektryczny

PID – ang. *proportional-integral-derivative (controller)* – proporcjonalno-całkująco-różniczkujący (regulator)

PMSG – ang. *permanent magnet synchronous generator* – generator synchroniczny z magnesami trwałymi

USM – ang. *unsharp masking* – maskowanie nieostrości

ZOH – ang. *zero-order hold* – ekstrapolator rzędu zerowego

1. WPROWADZENIE

1.1. Przedmowa

Rachunek różniczkowo-całkowy ułamkowego rzędu to fascynujące i potężne narzędzie rozszerzające klasyczny rachunek różniczkowo-całkowy. W przeciwieństwie do tradycyjnego rachunku różniczkowo-całkowego, który ogranicza się do operacji rzędu całkowitego, rachunek różniczkowo-całkowy ułamkowego rzędu wprowadza pojęcie różniczkowania i całkowania dowolnych rzędów rzeczywistych lub nawet zespolonych. Te ramy matematyczne, choć zakorzenione już w XVII wieku, zyskały znaczną popularność w ostatnich dekadach ze względu na niezwykle skuteczne modelowanie złożonych układów z pamięcią, nielokalnością i anomaliami. Wraz z ciągłym rozwojem narzędzi obliczeniowych i teoretycznych spostrzeżeń, rachunek różniczkowo-całkowy ułamkowego rzędu odgrywa coraz większą rolę w modelowaniu czy też wręcz w odkrywaniu zawiłości świata przyrody i inżynierii. Jego interdyscyplinarne zastosowania obejmujące fizykę, inżynierię, biologię, finanse i inne dziedziny nauki, uczyniło go kamieniem węgielnym współczesnej matematyki stosowanej.

W swojej istocie rachunek różniczkowo-całkowy ułamkowego rzędu rozszerza klasyczne pojęcia różniczkowania i całkowania poprzez wprowadzenie operatorów, takich jak pochodna ułamkowa D^α i całka ułamkowa I^α , gdzie α jest liczbą niecałkowitą. Operatory te uwzględniają zachowania, których rachunek klasyczny nie bierze pod uwagę, takie jak modelowanie efektów pamięciowych w materiałach lepkosprężystych czy odwzorowanie anomalnej dyfuzji w ośrodkach złożonych. Podczas gdy pochodna pierwszego rzędu opisuje tempo zmian funkcji, pochodna ułamkowego rzędu opisuje *zachowanie* występujące pomiędzy funkcją a jej pierwszą pochodną, odzwierciedlającą dynamikę pośrednią.

Dla przykładu, rozważmy klasyczną pochodną pierwszego rzędu funkcji $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$, która jest zdefiniowana jako

$$D^1 f(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{f(t + \Delta t) - f(t)}{\Delta t}. \quad (1.1)$$

W dalszej kolejności można wyznaczyć pochodną zdefiniowanej powyżej funkcji pochodnej, czyli drugą pochodną

$$D^2 f(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta D^1 f}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{f(t + 2\Delta t) - 2f(t + \Delta t) + f(t)}{(\Delta t)^2}. \quad (1.2)$$

Kontynuując rozważania w sposób rekurencyjny, można powyższe wzory uogólnić na pochodną rzędu $n \in \mathbb{N}$, czyli

$$D^n f(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{(\Delta^n) f}{(\Delta t)^n} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{(\Delta t)^n} \sum_{m=0}^n (-1)^m \binom{n}{m} f(t + (n-m)\Delta t) \quad (1.3)$$

gdzie $\binom{n}{m} = \frac{n(n-1)\dots(n-m+1)}{m!}$ jest symbolem Newtona. Usuwając ograniczenie, że n jest liczbą naturalną, można uogólnić pojęcie pochodnej na rząd ułamkowy $\alpha > 0$, definiując

$$D^\alpha f(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0^+} \frac{(\Delta^\alpha) f}{(\Delta t)^\alpha} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0^+} \frac{1}{(\Delta t)^\alpha} \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \binom{\alpha}{m} f(t + (\alpha-m)\Delta t) \quad (1.4)$$

gdzie $\binom{\alpha}{m} = \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-m+1)}{m!}$ oznacza uogólnienie pojęcia symbolu Newtona dla $\alpha > 0$ (dla $\alpha \in \mathbb{N}$ przyjmujemy $\binom{\alpha}{m} = 0$ gdy $m > \alpha$). Równanie (1.4) to *de facto* definicja pochodnej Grünwalda-Letnikova rzędu ułamkowego $\alpha > 0$ [1], która będzie analizowana bardziej formalnie w dalszej części rozprawy. Istotne jest, aby zauważyć, że suma w (1.4) jest nieskończona, tzn. jest szeregiem, który w zależności od argumentu t sięga do minus nieskończoności. Widać więc, że obliczana pochodna rzędu ułamkowego jest zależna od wszystkich wartości funkcji $f(t)$ dla argumentów sięgających aż minus nieskończoności, czyli taka pochodna *wydobywa* efekty pamięciowe i posiada *nieskończoną pamięć* zdarzeń przeszłych.

Opisane powyżej (bardzo ogólnie) własności pamięciowe sprawiają, że rachunek różniczkowo-całkowy ułamkowego rzędu jest szczególnie przydatny w modelowaniu matematycznym układów o złożonej dynamice. W modelowaniu takich właśnie układów znalazł on swoje zastosowanie w ostatnich latach i przekształcił się z teoretycznej ciekawostki w praktyczne narzędzie, którego rozwój jest stymulowany dostępem do coraz większej mocy obliczeniowej i rosnącą potrzebą modelowania coraz to nowych układów i procesów.

1.2. Motywacja do badań

Motywacją do badań prezentowanych w tej rozprawie doktorskiej są zastosowania rachunku różniczkowo-całkowego ułamkowego rzędu, które są obecnie wszechstronne i cały czas rozszerzane na nowe dziedziny. Począwszy od inżynierii sterowania, rachunek różniczkowo-całkowy ułamkowego rzędu służy do projektowania regulatorów proporcjonalno-całkująco-różniczkujących (ang. *proportional-integral-derivative* – skrót PID) ułamkowego rzędu, które oferują lepszą niezawodność i wydajność w porównaniu z tradycyjnymi regulatorami PID [2]. Dodatkowe parametry dostrajania poprawiają wydajność sterowania w systemach, które charakteryzują się opóźnieniami czasowymi i zachowaniami nieliniowymi. Regulatory PID ułamkowego rzędu zapewniają lepsze śledzenie wartości zadanej i tłumienie zakłóceń w porównaniu z klasycznymi regulatorami PID. Mogą być one skutecznie wykorzystywane w procesach przemysłowych, np. jako regulatory temperatury. Badanie regulacji temperatury wymiennika ciepła pokazało, że regulator PID, wykorzystując rzędy ułamkowe, skrócił czas przeregulowania i stabilizacji układu [3]. Regulatory te zyskały również popularność w robotyce przy modelowaniu i sterowaniu układami o właściwościach lepkosprężystych lub złożonej dynamice, takich jak elastyczne manipulatory lub roboty miękkie. Regulatory te uwzględniają zachowanie materiałów zależne od pamięci. Przykładowo w manipulatorze robota z elastycznymi ramionami zastosowano regulator ułamkowego rzędu, aby zwiększyć odporność na przesterowania w przypadku zmiany obciążenia ramienia dużo skuteczniej niż stosując regulator rzędu całkowitego [4]. Zastosowano lekkie ramię robota do zadań precyzyjnych, gdzie regulator PID ułamkowego rzędu poprawił stabilność i dokładność. Z uzyskanych wyników interesującą cechą schematu kontroli ułamkowego rzędu jest to, że przeregulowanie było niezależne od masy końcówki ramienia robota. W przypadku regulatora rzędu ułamkowego sygnał sterujący był mniej zaszumiony niż w przypadku standardowego regulatora PID, ponieważ integrator

rzędu ułamkowego działał jak filtr dolnoprzepustowy i zredukował wpływ szumu wprowadzanego do pętli sterowania.

Również układy powszechnie stosowane w sieciowych systemach sterowania, stanowią duże wyzwanie ze względu na ich opóźnioną reakcję. Regulatory rzędu ułamkowego mogą stabilizować te systemy. Przykładowo w [5] zaproponowano kompensator czasu martwego ułamkowego rzędu w celu poprawy sterowalności sieci bezprzewodowych i obsługi kompensacji dłuższych opóźnień. Bezprzewodowy kontroler wykazał skuteczne śledzenie, krótszy czas narastania sygnału i poprawę w całym procesie. Co więcej kontroler zachował integralność i stabilność procesu w sieciach bezprzewodowych, nawet przy 30 procentach dostępnych danych procesowych w scenariuszu symulacji utraty pakietów. Kontroler okazał się wysoce niezawodnym i skutecznym rozwiązaniem poprawiającym sterowalność sieci bezprzewodowych. Wyniki wydajności kwalifikują zastosowanie kontrolera w bezprzewodowych sieciach czujników, ograniczając problemy związane z utratą pakietów, a tym samym zapewniając bardziej stabilne warunki pracy sieci.

Sterowanie predykcyjne z wykorzystaniem modelu ułamkowego rzędu rozszerza tradycyjne sterowanie poprzez włączenie dynamiki ułamkowego rzędu do modelu systemu, umożliwiając lepsze przewidywanie i sterowanie systemami z pamięcią długoterminową lub dynamiką anomalną. Przykładowo w systemie sterowania układem kierowniczym autonomicznego pojazdu, sterowanie predykcyjne z wykorzystaniem modelu ułamkowego rzędu zostało zastosowane do optymalizacji śledzenia trajektorii jazdy autonomicznego pojazdu naziemnego [6]. Model ułamkowego rzędu odzwierciedlał zarówno model kinematyczny, jak i dynamiczny, co przełożyło się na płynniejsze i bardziej precyzyjne kierowanie w porównaniu ze sterowaniem predykcyjnym z wykorzystaniem modelu całkowitego rzędu. Zostało to przetestowane w środowisku symulacyjnym dla autonomicznego samochodu pokonującego różne ścieżki referencyjne. Sterownik ułamkowego rzędu wykazał znaczną poprawę w zakresie podążania daną ścieżką. Wprowadzenie zewnętrznego zakłócenia w postaci zmiany tarcia lewego i prawego koła, nawet wprowadzone na stałe, nie miało wpływu na pracę pojazdu.

Regulatory ułamkowego rzędu poprawiają stabilność i wydajność systemów energetycznych takich jak sieci energii odnawialnej, poprzez dokładniejsze modelowanie ich złożonej dynamiki wynikającej z nieciągłości źródeł i wahań obciążenia. W pracy [7] zaproponowano nową metodę sterowania pracą turbin wiatrowych ze zmienną prędkością obrotową z topologią PMSG pełnej mocy (z wykorzystaniem generatora synchronicznego z magnesami trwałymi). Wyniki symulacji pokazują, że proponowana strategia sterowania ułamkowego rzędu poprawia odporność systemu na zakłócenia.

Pochodne ułamkowe usprawniają także analizę sygnałów, szczególnie w filtrowaniu i ekstrakcji cech sygnałów o właściwościach fraktalnych lub niestacjonarnych, takich jak sygnały biomedyczne. Przykładowo w pracy [8] zaproponowano model ułamkowego rzędu do generowania przebiegów podobnych do przebiegów EKG. Autorzy wskazują, że wprowadzenie modelu ułamkowego rzędu umożliwia dokładniejszy opis dynamiki serca w porównaniu z istniejącymi podejściami. Różne kombinacje włączania dynamiki ułamkowej w równania stanu prowadzą do pojawienia się różnych,

zdrowych lub chorych, przebiegów EKG. Za pomocą przedstawionego modelu możliwe jest uzyskanie takich patologii pracy serca jak bradykardia, tachykardia, czy migotanie komór.

Za pomocą pochodnych ułamkowego rzędu możliwe jest też poprawienie szczegółów tekstur w obrazach cyfrowych poprzez użycie precyzyjnych masek różnicowych [9]. Przedstawione badania wskazują, że podejście oparte na rachunku różniczkowym ułamkowego rzędu jest zdecydowanie lepsze niż tradycyjne algorytmy, ponieważ poprawia szczegóły tekstury w gładkich obszarach obrazów cyfrowych o bogatej teksturze. Z kolei model oparty na maskowaniu nieostrości (ang. *unsharp masking* – skrót *USM*) z pochodnymi ułamkowego rzędu [10] wyostrzył krawędzie obrazu, zachowując jednocześnie szczegóły niskiej i średniej częstotliwości. Liczne symulacje przeprowadzone na kilku standardowych obrazach o różnych rozmiarach potwierdziły skuteczność proponowanego podejścia w porównaniu z istniejącymi technikami. Co więcej, analiza porównawcza przeprowadzona pod kątem miar ilościowych, takich jak entropia informacyjna (ang. *information entropy* – skrót *IE*), średni gradient (ang. *average gradient* – skrót *AG*), miara wzmocnienia (ang. *measure of enhancement* – skrót *EME*) itp., potwierdziła, że proponowane podejście oparte na pochodnej ułamkowej przewyższa istniejące najnowocześniejsze techniki wzmacniania obrazu. Potencjał proponowanego podejścia został zweryfikowany przez rozważenie jego zastosowania w obrazach medycznych.

Badanie rachunku różniczkowego ułamkowego rzędu stawia również intrygujące wyzwania. Niestety pojęcie pochodnej ułamkowego rzędu nie jest jednoznacznie zdefiniowane: istnieje w literaturze wiele, często nierównoważnych, definicji. Różne definicje pasują do różnych problemów, a wybór właściwej definicji wymaga starannego rozważenia właściwości układu. Ponadto rozwiązywanie równań różniczkowych ułamkowego rzędu często wymaga specjalistycznych technik, ponieważ klasyczne metody oparte o transformację Laplace'a muszą zostać odpowiednio zaadaptowane. Pomimo tych wyzwań, dziedzina ta stale rozwija się, a trwające badania obejmują między innymi nowe definicje, metody numeryczne i zastosowania. W tej rozprawie doktorskiej skoncentrowano się na zastosowaniach rachunku różniczkowo-całkowego ułamkowego rzędu w naukach elektrycznych, w szczególności w elektromagnetyzmie i teorii obwodów. W literaturze spotkać można wiele definicji pochodnych ułamkowego rzędu użytecznych do modelowania systemów elektromagnetycznych oraz obwodów elektrycznych [11, 12, 13, 14]. Niektóre definicje są dobrze ugruntowane, podczas gdy niektóre zostały wprowadzone całkiem niedawno. Mnogość i niejednoznaczność definicji pochodnych ułamkowego rzędu czasami ogranicza ich użyteczność. Konieczna jest zatem dokładna analiza właściwości poszczególnych pochodnych i określenie ich stosowalności z punktu widzenia modelowania i symulacji zarówno systemów elektromagnetycznych jak i obwodów elektrycznych.

W opublikowanych pracach, które przedstawiają wyniki badań naukowych składających się na niniejszą rozprawę doktorską, zbadano temat stosowalności wybranych definicji, wprowadzając podstawowe właściwości pochodnych ułamkowego rzędu niezbędne do aplikacji w elektromagnetyzmie i teorii obwodów. Spełnienie tych właściwości pozwala jednoznacznie określić poprawność i zakres stosowalności danej definicji. Okazuje się, że nie wszystkie definicje pochodnych ułamkowego rzędu

pozwalają na modelowanie systemów elektromagnetycznych oraz obwodów elektrycznych. W niniejszej pracy przedstawiono analizę teoretyczną, której wyniki wskazują, że pochodna Marchaud może być z powodzeniem zastosowana do modelowania systemów elektromagnetycznych i obwodów elektrycznych. W dalszej kolejności wskazano zakres rzędu pochodnej ułamkowej, który zapewnia zgodność definicji Marchaud z definicją Grünwalda-Letnikova. Dzięki temu możliwe było zaproponowanie nowych metod symulacji układów elektromagnetycznych i obwodów elektrycznych o parametrach rozproszonych, które opierają się na teorii systemów niecałkowitego rzędu stosujących pochodną Grünwalda-Letnikova.

1.3. Cel i teza pracy

Celem tej pracy jest wykazanie poprawności modelowania matematycznego systemów elektromagnetycznych i obwodów elektrycznych ułamkowego rzędu za pomocą pochodnej Marchaud (oraz Grünwalda-Letnikova w sytuacji, gdy rząd pochodnej zapewnia jej zgodność z definicją Marchaud). W szczególności, w ramach badań przedstawionych w pracy sformułowano właściwości, jakie musi posiadać pochodna czasowa ułamkowego rzędu w naukach elektrycznych (tj. elektromagnetyzmie i teorii obwodów). Stwierdzono, że taka pochodna powinna spełniać własność półgrupy i być *naturalnie* reprezentowalna w dziedzinie fazonów. Następnie zebrano podstawowe i najbardziej popularne definicje pochodnych ułamkowego rzędu i dokonano ich krytycznej oceny z punktu widzenia ww. właściwości. Okazało się, że tylko pochodna Marchaud nie prowadzi do sprzeczności matematycznych w sytuacji, gdy pochodne czasowe ułamkowego rzędu są stosowane w naukach elektrycznych. Na tej podstawie możliwe jest sformułowanie tezy pracy.

Teza pracy: Zastosowanie pochodnej ułamkowej w dziedzinie czasu opartej o definicję Marchaud zapewnia poprawność modelowania matematycznego systemów elektromagnetycznych i obwodów elektrycznych ułamkowego rzędu.

Tym samym w pracy zostanie wykazane, że pochodna Marchaud spełnia właściwości konieczne do tego, aby modelowanie matematyczne systemów elektromagnetycznych i obwodów elektrycznych nie prowadziło do sprzeczności z istniejącymi zasadami analizy takich systemów i obwodów. Chociaż uwzględnienie złożonych właściwości dynamicznych rzeczywistych systemów poprzez zastosowanie rachunku różniczkowo-całkowego ułamkowego rzędu pozwala na uzyskanie dokładniejszych i bardziej realistycznych wyników modelowania matematycznego, analiza dokładności modelowania z wykorzystaniem pochodnych ułamkowych nie leży w zakresie tematu tej pracy, co oznacza, że niniejsza rozprawa doktorska ma charakter teoretyczny a nie eksperymentalny. W literaturze przedmiotu wielokrotnie wykazano, że właściwości pochodnych ułamkowych poprzez uwzględnienie efektów pamięci pozwalają na precyzyjny opis dynamiki układów rzeczywistych, co prowadzi do dokładniejszego modelowania procesów fizycznych w stosunku do modeli matematycznych opartych na klasycznych pochodnych. Ten fakt znajduje potwierdzenie w już opublikowanych wynikach badań eksperymentalnych, przez co jest poza zakresem badań teoretycznych prezentowanych w tej pracy.

Dlatego w dalszej części pracy zainteresowany czytelnik będzie odsyłany do prac eksperymentalnych, które dotyczą tematu bez powielania już zrealizowanych badań.

1.4. Plan pracy

Rozprawa doktorska składa się z pięciu rozdziałów i ma następującą strukturę.

W rozdziale pierwszym przedstawiono cel, zakres, tezę oraz metodykę realizacji badań przedstawionych w pracy.

W rozdziale drugim podano podstawowe definicje i właściwości pochodnych ułamkowego rzędu, niezbędne do zastosowań w elektromagnetyzmie i teorii obwodów. Przedstawiono różne definicje pochodnych ułamkowego rzędu i dokonano ich krytycznej oceny z punktu widzenia elektromagnetyzmu i teorii obwodów.

Rozdział trzeci przedstawia zastosowanie pochodnej Marchaud w elektromagnetyzmie i teorii obwodów. Przedstawione zostały opisy modeli ułamkowego rzędu, które mogą posłużyć do modelowania zjawisk elektromagnetycznych, jak i modelowania dyskretnych elementów obwodów, takich jak kondensatory, rezystory czy cewki ułamkowego rzędu.

W rozdziale czwartym przedstawiono opracowane metody rozwiązywania równań Maxwella dla pola elektromagnetycznego w ośrodkach opisanych relacjami konstytutywnymi ułamkowego rzędu, od rozwiązań analitycznych po metody szeroko wykorzystywane do symulacji komputerowych, tj. metodę różnic skończonych w dziedzinie czasu (ang. *finite-difference time-domain* – skrót FDTD). Następnie wyprowadzono warunek stabilności dla ośrodków opisanych przez relacje konstytutywne ułamkowego rzędu w metodzie FDTD. Jego spełnienie jest niezbędne do przeprowadzenia stabilnych obliczeń numerycznych za pomocą tej metody. Przeprowadzono również symulacje numeryczne propagacji niemonochromatycznej fali płaskiej w półprzestrzeni opisanej relacjami konstytutywnymi ułamkowego rzędu. Stosując algorytm globalnego znajdowania pierwiastków i biegunów zespolonych (ang. *global roots and poles finding* – skrót GRPF) wykazano, że zgodnie z równaniem charakterystycznym, rozmiar kroku czasowego można zwiększyć powyżej klasycznej granicy stabilności w przypadku monochromatycznym. Zaproponowano również nową bezwzględnie stabilną metodę symulacji propagacji fal w ośrodkach opisanych relacjami konstytutywnymi ułamkowego rzędu, tj. rozszerzono stosowalność metody różnic skończonych w dziedzinie czasu Cranka-Nicolsona (CN-FDTD) o takie ośrodki.

W rozdziale piątym podsumowano pracę i omówiono wkład autora w zaprezentowane badania.

Na końcu rozprawy zamieszczono bibliografię oraz załączniki.

Dla wykazania tezy głoszonej w rozprawie doktorskiej, w Sekcji 2.1 przedstawiono właściwości, które są niezbędne, aby stosować pochodne ułamkowego rzędu w analizie systemów elektromagnetycznych i obwodów elektrycznych. Następnie, w Sekcji 2.2 przeanalizowano krytycznie popularne definicje pochodnych ułamkowego rzędu (tj. Riemanna-Liouville'a, Caputo, Liouville'a, Marchaud, Grünwalda-Letnikova i inne definicje nieklasyczne) pokazując, że tylko definicja Marchaud spełnia wymagane wcześniej właściwości. Nadmienić tutaj trzeba, że definicja Grünwalda-Letnikova jest równoważna definicji

Marchaud dla określonych funkcji i rzędów pochodnej, co również czyni ją użyteczną z punktu widzenia elektromagnetyzmu i teorii obwodów. W Sekcjach 3.2 i 3.5 pokazano, że naruszenie postulowanej własności półgrupy dla pochodnych czasowych ułamkowego rzędu prowadzi do różnych równań typu dyfuzyjno-falowego w dziedzinie czasu dla pola elektrycznego i magnetycznego (Sekcja 3.2) oraz napięcia i prądu w linii transmisyjnej ułamkowego rzędu (Sekcja 3.5). Taka sytuacja jest sprzeczna z rezultatem analizy w dziedzinie częstotliwości, gdzie pola elektryczne i magnetyczne oraz napięcie i prąd odpowiednio spełniają te same równania. Prowadzi to do absurdu i dowodzi konieczności stosowania pochodnych ułamkowego rzędu spełniających własność półgrupy, czyli rozważania w Sekcjach 3.2 i 3.5 wspierają własności postulowane w Sekcji 2.1 dla zastosowań pochodnych ułamkowego rzędu w elektromagnetyzmie i teorii obwodów.

2. POCHODNE UŁAMKOWEGO RZĘDU

Już w czasach starożytnych pojawiły się pierwsze idee prowadzące do rachunku całkowego. Obliczenia powierzchni figur płaskich i objętości brył znalezione zostały w egipskim Papirusie Moskiewskim z około 1850 roku p.n.e. [15]. Przedstawione pomysły były jednak tylko luźno zasygnalizowane, a wyprowadzone wzory nie były usystematyzowane i wyprowadzone w logicznej ciągłości.

W matematyce greckiej Eudoksos z Knidos (ok. roku 408 – 355 pne) stosował do obliczania powierzchni figur płaskich i objętości brył tzw. metodę wyczerpania, która wprowadza intuicyjne pojęcie granicy. Metoda wyczerpania to metoda znajdowania pola figury poprzez wpisanie w nią wielokątów foremnych o coraz większej liczbie boków. Gdy liczba boków wielokątów wzrasta, pole wielokątów zbiega do pola, w który wielokąty są wpisane. Archimedes (ok. roku 287 – 212 pne) wykorzystał metodę wyczerpania do oszacowania liczby π i wyznaczenia pola powierzchni kuli, wymyślając kolejno heurystyki, które przypominają metody rachunku całkowego [16]. Greckiemu matematykowi Demokrytowi również przypisane są pierwsze próby wykorzystania rachunku różniczkowego. Rozwahał on podział obiektów na nieskończoną liczbę przekrojów, ale jego niezdolność do racjonalizacji dyskretnych przekrojów za pomocą gładkiego nachylenia stożka uniemożliwiła mu zaakceptowanie tego pomysłu. Wiele elementów rachunku różniczkowego spotykane jest w późniejszych okresach w kulturze chińskiej, Bliskiego Wschodu i później w średniowiecznej Europie i Indiach.

Jednak dopiero w XVII wieku podjęto skuteczne próby usystematyzowania rachunku różniczkowo-całkowego. W 1659 roku w komentarzach do pracy Descartesa „Geometria” opisane zostały metody wprowadzające do rachunku różniczkowego. Niedługo potem niezależnie Isaac Newton oraz Gottfried Wilhelm Leibniz usystematyzowali i wyprowadzili podstawowe równania rachunku różniczkowego i całkowego [17].

Półtora wieku później, dzięki pracom Cauchy’ego i Weierstrassa znaleziono sposób na wyeliminowanie z rachunku różniczkowego wartości nieskończenie małych poprzez wprowadzenie pojęcia granicy [18]. W pracach Cauchy’ego znajdziemy szeroki opis fundamentalnych zagadnień rachunku różniczkowego, w tym definicję ciągłości i wprowadzenie do definicji granicy różniczkowania [19], która następnie została rozszerzona przez Weierstrassa. Po pracach Weierstrassa ostatecznie powszechne stało się opieranie rachunku różniczkowego na granicach zamiast na wielkościach nieskończenie małych. Bernhard Riemann wykorzystał tę ideę, aby sformalizować definicję całki opartą na granicy [20].

Pierwsze ślady pochodnej ułamkowej można odnaleźć w liście Gottfrieda Wilhelma Leibniza z 1695 roku, który odpowiada na pytanie Guillaume’a de l’Hospitala co się stanie, gdy rząd różniczkowania będzie ułamkowy [21]. Leibniz odpowiada, że doprowadzi to do paradoksu, który będzie miał użyteczne konsekwencje w przyszłości. Dwa lata później Leibniz zauważa również, że

nieskończony iloczyn Wallis'a, będący rozwinięciem wyrażenia $\pi/2$, może być zapisany za pomocą pochodnej ułamkowego rzędu.

Kompletny rachunek różniczkowo-całkowy ułamkowego rzędu przedstawił dopiero w 1823 roku Niels Henrik Abel, rozwiązując problem tautochrony w jednym z swoich pierwszych dzieł [22]. Abel mając zaledwie 21 lat, został ojcem rachunku całkowego ułamkowego rzędu. Publikacja zawierała wszystkie elementy tego, co obecnie jest nazywane rachunkiem ułamkowym. Abel wprowadził całkowanie ułamkowego rzędu w postaci, która jest obecnie znana jako całka ułamkowa Riemanna-Liouville'a oraz różniczkowanie ułamkowego rzędu w postaci, która jest obecnie znana jako pochodna ułamkowa Caputo. Z nieznanых powodów trzy lata później Abel w swoim kolejnym artykule [23] uprościł rozwiązanie problemu tautochrony i porzucił linię teoretycznego rozwoju rachunku ułamkowego, do którego już nigdy nie powrócił. Jego klarowne prace mogły być jednakże inspiracją dla Liouville'a, który w 1832 [24] podjął pierwsze próby nadania logicznej definicji pochodnym ułamkowym. Pierwsza formuła Liouville'a pochodnej ułamkowego rzędu dotyczyła funkcji, które są rozwijalne w szereg. Niestety dla tej formuły rząd pochodnej ułamkowej musiał być tak dobrany, aby funkcja była zbieżna. Druga formuła Liouville'a została oparta o funkcję gamma Eulera. Niestety nie może ona być stosowana do szerokiej klasy funkcji.

Samouk Oliver Heaviside wprowadził praktyczne zastosowanie ułamkowych operatorów różniczkowych w analizie elektrycznych linii przesyłowych około 1890 roku. Teoria i zastosowania rachunku ułamkowego znacznie się rozwinęły w XIX i XX wieku, a wielu autorów podało różne definicje pochodnych i całek ułamkowych. W kolejnych rozdziałach przedstawione zostaną definicje pochodnych ułamkowego rzędu oraz ich przydatność w naukach elektrycznych tj. elektromagnetyzmie i teorii obwodów.

Rachunek różniczkowo-całkowy przydatny jest do opisu i analizy wszelkiego rodzaju zjawisk fizycznych. Jego sformułowanie ułamkowego rzędu zyskało znaczną popularność i znaczenie w ciągu ostatnich dekad, głównie dzięki zaletom i zastosowaniom w wielu różnorodnych i szeroko rozpowszechnionych dziedzinach nauki. Pochodne ułamkowego rzędu, jak również całki ułamkowego rzędu dostarczają użytecznych narzędzi do modelowania matematycznego procesów i zjawisk z pamięcią stanu. Mnogość definicji pochodnych ułamkowego rzędu skłania do bliższej analizy ich właściwości, pod kątem wykorzystania do modelowania różnorodnych zjawisk fizycznych. **Rezultaty prezentowane w tym rozdziale są opublikowane w artykule [25], którego autor tej rozprawy jest współautorem.**

2.1. Podstawowe definicje i właściwości pochodnych ułamkowego rzędu niezbędne do zastosowań w elektromagnetyzmie i teorii obwodów

W tym rozdziale pracy przedstawiona jest podstawowa definicja pochodnej ułamkowego rzędu oraz właściwości, które kwalifikują wybrane definicje pochodnych do użycia w modelowaniu systemów elektromagnetycznych czy też obwodów elektrycznych.

W rachunku różniczkowym i całkowym ułamkowego rzędu bardzo ważną funkcję pełni tzw.

funkcja Mittag-Lefflera definiowana szeregiem

$$E_{\alpha,\beta}(\tau \mathbf{A}) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\tau^k \mathbf{A}^k}{\Gamma(\alpha k + \beta)} \quad (2.1)$$

gdzie $\alpha, \beta > 0$ to jej parametry, a Γ oznacza funkcję Gamma. Promień zbieżności tego szeregu równy jest $+\infty$, przy czym obowiązuje konwencja, że jeśli $p = \alpha k + \beta$ jest niedodatnią liczbą całkowitą, to przyjmujemy $1/\Gamma(p) = 0$.

W literaturze istnieje wiele różnych podejść do rachunku różniczkowo-całkowego ułamkowego rzędu. Całka ułamkowa i pochodna Riemanna-Liouville'a są podstawą, na której bazuje wprowadzenie do tematu. Dlatego też od tej koncepcji warto rozpocząć rozważania w tej pracy. Całka Riemanna-Liouville'a funkcji $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ jest zdefiniowana jako

$$J_a^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t f(\tau)(t-\tau)^{\alpha-1} d\tau \quad (2.2)$$

gdzie $\alpha > 0$ jest rzędem całki, Γ jest funkcją Gamma, a a jest ustalonym punktem bazowym. Jeśli punkt bazowy nie jest określony to domyślnie jest on równy $-\infty$. Na podstawie tej definicji, pochodna Riemanna-Liouville'a rzędu α jest przedstawiona jako

$${}_{RL}D_a^\alpha f(t) = D J_a^{1-\alpha} f(t). \quad (2.3)$$

Własności całek i pochodnych ułamkowego rzędu Riemanna-Liouville'a są dokładnie wyjaśnione w klasycznych monografiach, np. ([26], [1], [27]). Punkt bazowy a całki ułamkowej J^α jest ważnym parametrem, który znacząco wpływa na sposób, w jaki operator J działa na funkcje. Wartość a może być w rzeczywistości wybrana w sposób dość arbitralny. Stąd jest to jeden z problemów, które należy dokładnie rozważyć podczas tworzenia modeli matematycznych ułamkowego rzędu w elektromagnetyzmie [28], [29] czy teorii obwodów [12, 13, 14]. Kolejną niedogodnością związaną z całką Riemanna-Liouville'a (2.2) ze skończonym punktem bazowym jest to, że nie odwzorowuje ona funkcji okresowych na funkcje okresowe i wykładniczych na wykładnicze (dokładne wzory można znaleźć w tabeli 9.1 w [1]). Wybór punktu bazowego $a = -\infty$ nie wyznacza żadnego dowolnego momentu w czasie, co jest dobrą właściwością, lecz wymaga, aby funkcje były zdefiniowane i całkowne w nieograniczonej dziedzinie ($f \in L^p(\mathbb{R}^1)$ dla $1 \leq p < 1/\alpha$ – patrz dyskusja na początku rozdziału 2 w [1]). Taki wybór punktu bazowego $a = -\infty$ naturalnie działa np. w przypadku ułamkowych uogólnień równania Schrödingera [30]. Niestety oznacza to, że funkcje takie jak stałe i funkcje sinus/cosinus znajdują się poza dziedziną ułamkowego różniczkowania Riemanna-Liouville'a z punktem bazowym $a = -\infty$. Istnieją jednak dwa ściśle powiązane podejścia, które uogólniają różniczkowanie Riemanna-Liouville'a z punktem bazowym $a = -\infty$, tj. pochodna Weyla zdefiniowana dla funkcji okresowych (patrz rozdział 19 w [1]) oraz pochodna Marchaud (patrz rozdział 5.4 w [1] i rozdział 1.3.1 w [31]). Oba podejścia są opisane i omówione, również z perspektywy historycznej, w artykule [32]. Skupimy się teraz na definicji Marchaud, ponieważ jest ona bardziej ogólna i może być stosowana nie tylko do funkcji okresowych. Pochodna Marchaud rzędu $\alpha \in (0, 1)$ jest zdefiniowana jako

$$D^\alpha f(t) = \frac{\alpha}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^{+\infty} \frac{f(t) - f(t-\tau)}{\tau^{1+\alpha}} d\tau = \frac{\alpha}{\Gamma(1-\alpha)} \int_{-\infty}^t \frac{f(t) - f(\tau)}{(t-\tau)^{1+\alpha}} d\tau. \quad (2.4)$$

Wzory (2.3) i (2.4) przedstawiają dwie różne definicje pochodnej ułamkowej, które generalnie nie są sobie równoważne. W dalszej części pracy pochodne ułamkowego rzędu będziemy rozpatrywać w sensie wzoru (2.4). Należy tu wspomnieć, że pochodną Marchaud można również zdefiniować dla $\alpha > 1$ (patrz rozdział 5.5 w [1]).

Zanim jednak przejdziemy do omawiania pochodnej Marchaud, zdefiniujmy właściwości, które muszą zostać spełnione, aby móc zastosować pochodne ułamkowego rzędu w elektromagnetyzmie i teorii obwodów. W literaturze przedmiotu można znaleźć kilka prób zdefiniowania właściwości pochodnych ułamkowych, które powinny być spełnione w zastosowaniach fizycznych [33, 34, 35]. W szczególności zauważono, że spełnienie pewnych właściwości jest niezbędne do wykorzystania pochodnych niecałkowitego rzędu w naukach elektrycznych [28, 36]. Sformułujmy zatem zbiór właściwości niezbędnych do tego, by pochodne ułamkowego rzędu stosować w elektromagnetyzmie i teorii obwodów.

Na wstępie zakładamy, że rozważane funkcje muszą być wystarczająco regularne (wystarczająco gładkie), aby zastosować operator ułamkowego rzędu D^α ($\alpha > 0$). Ponadto, funkcje powinny być wystarczająco gładkie, aby sekwencja pochodnych D_x i D_t^α była zmienna, tzn. $D_x D_t^\alpha = D_t^\alpha D_x$ (w praktyce wystarczy założyć, że rozważane funkcje powinny być klasy C^2). Rozważmy funkcję $f(t)$ zdefiniowaną w całym zbiorze liczb rzeczywistych dla której dwustronna transformacja Laplace'a zdefiniowana jako

$$\hat{f} = \mathcal{L}\{f(t)\} = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-st} dt \quad (2.5)$$

jest identyczna do jednostronnej transformaty Laplace'a określonej jako

$$\hat{f} = \mathcal{L}\{f(t)\} = \int_0^{+\infty} f(t)e^{-st} dt \quad (2.6)$$

dla funkcji przyczynowej ($f(t) = 0$ for $t < 0$).

W pracy [25] uzasadniono, że zastosowanie pochodnych czasowych ułamkowego rzędu w naukach elektrycznych wymaga spełnienia następujących właściwości:

1. *Tożsamość*

$$D^0 f(t) = f(t). \quad (2.7)$$

2. *Zgodność z pochodną całkowitego rzędu*

$$D^\alpha f(t) = \frac{d^\alpha}{dt^\alpha} f(t), \quad \alpha \in \mathbb{N}. \quad (2.8)$$

3. *Zgodność z całką całkowitego rzędu*

$$D^{-\alpha} f(t) = \int \dots \int f(t) d^\alpha t, \quad \alpha \in \mathbb{N}. \quad (2.9)$$

4. *Liniowość*

$$D^\alpha (af(t) + bg(t)) = aD^\alpha f(t) + bD^\alpha g(t). \quad (2.10)$$

5. *Właściwość półgrupy*

$$D^\alpha D^\beta f(t) = D^\beta D^\alpha f(t) = D^{\alpha+\beta} f(t), \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}. \quad (2.11)$$

Właściwość półgrupy czasami walidowana jest z dodatkowymi założeniami $\alpha, \beta < 0$ lub $0 < \alpha, \beta, \alpha + \beta < 1$. Jak zauważono w [37], warunek (2.11) może nie być spełniony dla szeroko stosowanych definicji pochodnych ułamkowego rzędu. Brak tej właściwości prowadzi do sprzeczności rezultatów wyprowadzeń równań dyfuzyjno-falowych w dziedzinie czasu i częstotliwości, co jest analizowane w Sekcjach 3.2 i 3.5 niniejszej pracy.

6. Niezmienniczość funkcji trygonometrycznych

$$D^\alpha e^{j\omega t} = (j\omega)^\alpha e^{j\omega t} \quad (2.12)$$

gdzie $j = \sqrt{-1}$. Dziedzina zespolonej funkcji wykładniczej $s \mapsto s^\alpha$ jest dobrana tak, aby zawierała prawą półpłaszczyznę zespoloną $\Re s > 0$. Zatem

$$(j\omega)^\alpha = |\omega|^\alpha e^{j\alpha \operatorname{sgn}(\omega) \frac{\pi}{2}}. \quad (2.13)$$

Właściwość ta jest niezbędna do przeprowadzenia analizy fazorowej w elektromagnetyzmie i teorii obwodów, czyli analizy w dziedzinie częstotliwości przy założeniu monochromatycznego pobudzenia.

7. Pochodna funkcji stałej

$$D^\alpha c = 0 \quad (2.14)$$

gdzie $c = \text{const}$ oraz $\alpha > 0$. Właściwość ta wynika z niezmienniczości funkcji trygonometrycznych, ponieważ (2.14) wynika z (2.12) kiedy $\omega = 0$.

2.2. Podstawowe definicje pochodnych ułamkowego rzędu

Źródła literaturowe proponują wykorzystanie pochodnych ułamkowego rzędu w modelowaniu i symulacji zjawisk fizycznych. Jednakże odwołują się one do różnych definicji pochodnych ułamkowych. Niektóre definicje pochodnych ułamkowego rzędu są dobrze ugruntowane, podczas gdy niektóre z nich zostały wprowadzone całkiem niedawno. Omówiona zostanie tutaj stosowalność kluczowych definicji z punktu widzenia modelowania i symulacji w naukach elektrycznych. Motywacją do badań jest niejednoznaczność definicji pochodnej ułamkowego rzędu, której właściwości czasami wykluczają ją z tych zastosowań. Ostatnio pojawiły się nawet opinie kwestionujące przydatność pochodnych i modeli ułamkowego rzędu w elektrotechnice i inżynierii [28, 37, 29]. Taka dyskusja w literaturze sugeruje, że proponowana analiza właściwości pochodnych ułamkowego rzędu jest obecnie konieczna i pokazuje aktualność tematu tej rozprawy doktorskiej.

Dla funkcji $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, tj. zdefiniowanej na osi liczb rzeczywistych, definicje pochodnych ułamkowego rzędu mają *lewo-* i *prawostronne* wersje. W dalszych rozważaniach rozpatrywana będzie tylko *lewostronna*. Podejścia te są symetryczne przy czym *lewostronna* wersja operuje na czasie przeszłym, zatem jest bardziej adekwatna do modelowania procesów przyczynowych (fizycznych). Warto zauważyć, że obie pochodne Riemanna-Liouville'a oraz Caputo są zdefiniowane z użyciem *punktu bazowego*. Klasyczne podejście zakłada, że punkt bazowy $a \in \mathbb{R}$ jest skończoną liczbą, ale definicje

mogą być także rozszerzone do $a = -\infty$. Zazwyczaj, ze względu na założenie przyczynowości, przyjmuje się $a = 0$ oraz ogranicza dziedzinę funkcji f do przedziału $[0, +\infty)$.

2.2.1. Definicja Riemanna-Liouville'a

Dla zachowania spójności wywodu przypomnijmy, że całka Riemanna-Liouville'a definiowana jest jako

$$J_a^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t f(\tau)(t-\tau)^{\alpha-1} d\tau \quad (2.15)$$

gdzie $\alpha > 0$ to rząd całkowania, Γ jest funkcją Gamma oraz a jest określonym punktem bazowym. Zatem, pochodna Riemana-Liouville'a rzędu $\alpha \in (n-1, n)$ zdefiniowana jest jako

$${}_{RL}D_a^\alpha f(t) = D^n J_a^{n-\alpha} f(t). \quad (2.16)$$

Pochodna Riemanna-Liouville'a nie spełnia właściwości (2.11) oraz (2.12). Własność półgrupy spełniona jest tylko w ograniczonym zakresie tzn. dla $\alpha, \beta, \alpha + \beta \in (0, 1)$. Własność półgrupy dla całki Riemanna-Liouville'a omówiona jest w rozdziale 3.2 w [33]. Niektóre kontrprzykłady (związane z ułamkowymi równaniami różniczkowymi) są przedstawione w [38] (Przykład 6.2 Uwaga 5). Warunki składania pochodnych w sensie Riemanna-Liouville'a lub Caputo są różne dla tych dwóch operatorów pochodnych. Przykładowo, gdy $f(t) = c$, gdzie c jest dowolną stałą oraz $\alpha = \frac{1}{2}, \beta = 1$

$${}_CD_0^{\frac{1}{2}} {}_CD_0^1 c = {}_CD_0^{\frac{3}{2}} c = 0. \quad (2.17)$$

Jednakże,

$$0 = {}_{RL}D_0^{\frac{1}{2}} {}_{RL}D_0^1 c \neq {}_{RL}D_0^{\frac{3}{2}} c = \frac{ct^{-\frac{3}{2}}}{\Gamma(-\frac{1}{2})}. \quad (2.18)$$

Dla kolejnego przykładu, punkt bazowy $a = 0$ prowadzi do pochodnych funkcji sinus i cosinus, które nie są funkcjami elementarnymi ([39] Propozycja 11, 12)

$${}_{RL}D_0^\alpha \sin(\omega t) = \frac{t^{-\alpha}}{2} (E_{1,1-\alpha}(j\omega t) + E_{1,1-\alpha}(-j\omega t)) \quad (2.19)$$

$${}_{RL}D_0^\alpha \cos(\omega t) = \frac{t^{-\alpha}}{2} (E_{1,1-\alpha}(j\omega t) - E_{1,1-\alpha}(-j\omega t)). \quad (2.20)$$

Transformata Laplace'a pochodnych ułamkowego rzędu α ($\alpha \in [n-1, n)$ gdzie $n \in \mathbb{N}$) dla funkcji $f: [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ może być obliczona jako [31] (wzór (1.85))

$$\mathcal{L}\{{}_{RL}D_0^\alpha f(t)\} = s^\alpha \mathcal{L}\{f(t)\} - \sum_{k=0}^{n-1} s^k [D^{\alpha-k-1} f(t)]_{t=0}. \quad (2.21)$$

2.2.2. Definicja Caputo

Pochodna Caputo jest zdefiniowana podobnie do pochodnej Riemanna-Liouville'a (2.16), ale z odwrotną kolejnością całkowania ułamkowego rzędu i operatora pochodnej całkowitego rzędu

$${}_CD_a^\alpha f(t) = J_a^{n-\alpha} D^n f(t) \quad (2.22)$$

gdzie $\alpha \in (n-1, n)$. Możliwe jest także zdefiniowanie pochodnej Caputo w oparciu o całkę Riemanna–Liouville’a ([31] wzór (1.12) lub [27] wzór (2.4.1)) jako

$${}_CD_0^\alpha f(t) = {}_{RL}D_0^\alpha \left[f(t) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{t^k}{k!} f^{(k)}(0) \right] \quad (2.23)$$

gdzie ${}_CD^\alpha$ jest pochodną Caputo i ${}_{RL}D^\alpha$ jest pochodną Riemanna–Liouville’a z tym samym punktem bazowym $a = 0$. Definicje (2.22) oraz (2.23) są równoważne dla funkcji f klasy C^n , ponieważ definicja (2.23) formalnie wymaga tylko istnienia $(n-1)$ -tej pochodnej w sąsiedztwie punktu bazowego $a = 0$. Wzór (2.23) zastosowany do funkcji $f(t) = \sin t$ dla $\alpha \in (0, 1)$ wskazuje, że właściwość (2.19) jest także spełniona dla pochodnej Caputo z punktem bazowym $a = 0$. Zatem pochodna Caputo nie spełnia warunku (2.12). Szczegółowe formuły zawarte są w [39] (Propozycja 11 oraz 12). Ponadto, własność półgrupy (2.11) nie jest ogólnie poprawna dla tej definicji, patrz [38] w szczególności Przykład 6.1. Transformata Laplace’a pochodnej ułamkowego rzędu Caputo dla rzędu $\alpha \in (n-1, n]$ (gdzie $n \in \mathbb{N}$) z funkcji $f: [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ może być obliczona jako [31] (wzór (1.88))

$$\mathcal{L}\{{}_CD^\alpha f(t)\} = s^\alpha \mathcal{L}\{f(t)\} - \sum_{k=0}^{n-1} s^{\alpha-k-1} f^{(k)}(0). \quad (2.24)$$

2.2.3. Definicja Liouville’a–Caputo

Pochodna Liouville’a–Caputo jest zefiniowana jako pochodna Caputo z punktem bazowym $a = -\infty$ (patrz wzór (49) w [40])

$$D^\alpha f(t) = J_{-\infty}^{n-\alpha} D^n f(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_{-\infty}^t (t-\tau)^{n-\alpha-1} D^n f(\tau) d\tau \quad (2.25)$$

gdzie $\alpha > 0$ jest rzędem całkowania, $\alpha \in (n-1, n)$ dla $n \in \mathbb{N}$.

Właściwość niezmienniczości funkcji trygonometrycznych (2.12) jest zachowana, co może być bezpośrednio zweryfikowane przez wzór 5 z tabeli 9.2 w [1]. Czyli wzory

$$J^\beta(\sin \omega t) = \omega^{-\beta} \sin(\omega t - \beta \frac{\pi}{2}) \quad (2.26)$$

$$J^\beta(\cos \omega t) = \omega^{-\beta} \cos(\omega t - \beta \frac{\pi}{2}) \quad (2.27)$$

są spełnione dla $\omega > 0$ i $\beta \in (0, 1)$. Zauważmy, że dla $n \in \mathbb{N}$, otrzymamy

$$D^n \sin(\omega t + \phi) = \omega^n \sin(\omega t + \phi + n \frac{\pi}{2}) \quad (2.28)$$

$$D^n \cos(\omega t + \phi) = \omega^n \cos(\omega t + \phi + n \frac{\pi}{2}). \quad (2.29)$$

Dla $\alpha > 0$ oraz $\omega > 0$ otrzymamy

$$D^\alpha(\cos \omega t + j \sin \omega t) = J^{n-\alpha} D^n(\cos \omega t + j \sin \omega t) = \quad (2.30)$$

$$\begin{aligned} & \omega^n J^{n-\alpha}(\cos(\omega t + n \frac{\pi}{2}) + j \sin(\omega t + n \frac{\pi}{2})) = \\ & \omega^\alpha (\cos(\omega t - \alpha \frac{\pi}{2}) + j \sin(\omega t - \alpha \frac{\pi}{2})) = (j\omega)^\alpha e^{j\omega t}. \end{aligned}$$

Podobne wyprowadzenia mogą być uzyskane dla $\omega < 0$. Można zauważyć, że dla pochodnej Liouville'a–Caputo, właściwości funkcji trygonometrycznych (2.12) są także prawdziwe dla $\omega = 0$. Generalnie, właściwość półgrupy (2.11) nie jest spełniona dla pochodnej Liouville'a–Caputo. Zauważmy, że dla funkcji $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, gdzie $f(t) = 0$ dla $t \leq 0$, pochodna Liouville'a–Caputo pokrywa się z pochodną Caputo (zdefiniowaną w Sekcji 2.2.2), z punktem bazowym $a = 0$. Dlatego, dla każdego przykładu wspomnianego w Sekcji 2.2.2, gdzie

$${}_CD_0^\alpha {}_CD_0^\beta f(t) \neq {}_CD_0^{\alpha+\beta} f(t), \quad (2.31)$$

otrzymamy

$${}_CD_0^\alpha {}_CD_0^\beta f(t) \neq {}_CD_0^{\alpha+\beta} f(t). \quad (2.32)$$

W (2.31), ${}_CD_0^\alpha$ oznacza pochodną Caputo z punktem bazowym $a = 0$. Zatem, w ogólności, własność półgrupy (2.11) nie jest prawdziwa dla pochodnej Liouville'a–Caputo.

2.2.4. Definicja Liouville'a

W literaturze (patrz [1] wzory (5.6) oraz (5.7), a także [35, 39]) pochodna Riemanna–Liouville'a z punktem bazowym $a = -\infty$ określona jest jako pochodna Liouville'a. Rozważmy jej definicję

$$D^\alpha f(t) = D^n \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_{-\infty}^t f(\tau) (t-\tau)^{n-\alpha-1} d\tau \quad (2.33)$$

gdzie $\alpha > 0$ jest rzędem całkowania oraz $\alpha \in (n-1, n)$ dla $n \in \mathbb{N}$. Definicja wymaga, aby istniała prawostronna całka w równaniu (2.33). Można założyć, że funkcja f zanika w $-\infty$ wystarczająco szybko (np. dla $\alpha \in (0, 1)$, $f \in L^p(\mathbb{R}^1)$, gdzie $1 \leq p < 1/(n-\alpha)$). Rozważając funkcje okresowe, których całka w okresie jest równa zero, całka taka istnieje w sensie Riemanna dla każdej $\alpha > 0$ (oraz jest warunkowo zbieżna). Przypadek funkcji okresowych nawiązuje do konceptu tzw. *pochodnej Weyla* (patrz Rozdział 19 w [1]). Dla $\alpha \in (0, 1)$ oraz funkcji, które są wystarczająco dobre (np. różniczkowalne w sposób ciągły oraz zanikające w $-\infty$ wystarczająco szybko), definicja ta jest równoważna definicji pochodnej Marchaud. Równocześnie, pochodna Marchaud jest bardziej ogólna, ponieważ nie wymaga zanikania funkcji w $-\infty$ (patrz Rozdział 5.4 w [1]). Właściwości funkcji trygonometrycznych (2.12) mogą być sprawdzone podobnie jak w sekcji powyżej 2.2.3, tj., równania (2.26) oraz (2.27) dla $\beta = n - \alpha$ powinny być n -razy różniczkowalne, aby uzyskać pochodną Liouville'a rzędu α

$$D^\alpha (\cos \omega t + j \sin \omega t) = \quad (2.34)$$

$$\begin{aligned} D^n \omega^{\alpha-n} (\cos(\omega t - (n-\alpha)\frac{\pi}{2}) + j \sin(\omega t - (n-\alpha)\frac{\pi}{2})) &= \\ \omega^\alpha (\cos(\omega t - \alpha\frac{\pi}{2}) + j \sin(\omega t - \alpha\frac{\pi}{2})) &= \\ \omega^\alpha e^{j\omega t} e^{j\alpha\frac{\pi}{2}} &= (j\omega)^\alpha e^{j\omega t} \end{aligned}$$

dla każdej wartości $\alpha > 0$. Przypadek $\omega < 0$ może być rozwiązany w podobny sposób. Warto również zauważyć, że dla $\omega = 0$ (co odpowiada funkcji stałej), niezmienniczość funkcji trygonometrycznych (2.12) nie jest zachowana, ponieważ całka $\int_{-\infty}^t (t-\tau)^{n-\alpha-1} d\tau$ nie istnieje.

Zauważmy, że dla funkcji $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, gdzie $f(t) = 0$ dla $t \leq 0$, pochodna Liouville'a pokrywa się z definicją pochodnej Riemanna-Liouville'a (definicja zawarta w Sekcji 2.2.1) z punktem bazowym $a = 0$. Dlatego też, dla każdego przykładu wspomnianego w Sekcji 2.2.1, oraz tam gdzie

$${}_{RL}D_0^\alpha {}_{RL}D_0^\beta f(t) \neq {}_{RL}D_0^{\alpha+\beta} f(t), \quad (2.35)$$

otrzymamy

$${}_{RL}D_{RL}^\alpha D^\beta f(t) \neq {}_{RL}D^{\alpha+\beta} f(t). \quad (2.36)$$

Tutaj, ${}_{RL}D_0^\alpha$ oznacza pochodną Riemanna-Liouville'a z punktem bazowym $a = 0$. Zatem własność półgrupy (2.11) nie jest zachowana dla pochodnej Liouville'a.

2.2.5. Definicja Marchaud

Dla rzędu różniczkowania $\alpha \in (0, 1)$, pochodna Marchaud określona jest jako

$$D^\alpha f(t) = \frac{\alpha}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^{+\infty} \frac{f(t) - f(t-\tau)}{\tau^{1+\alpha}} d\tau. \quad (2.37)$$

Definicja ta jest równoważna definicji pochodnej ułamkowej rzędu Liouville'a ($\alpha \in (0, 1)$) dla klas funkcji wystarczająco regularnych z odpowiednim zachowaniem w $-\infty$, co szczegółowo przedstawiono w [1] (Rozdział 5.4). Oprócz tego występują bardzo ważne różnice pomiędzy tymi definicjami. Definicja pochodnej ułamkowej Marchaud może być obliczona dla dużo szerszej klasy funkcji niż definicja pochodnej ułamkowej Liouville'a, w szczególności dla funkcji stałych. Dodatkowo, rozszerzenie definicji Marchaud dla $\alpha > 1$ jest różne od tego dla definicji Liouville'a. Rozszerzenie definicji Marchaud dla $\alpha > 1$ może być sformułowane w dwóch kierunkach ([1] Rozdział 5.5, [31] Rozdział 1.3.1, oraz [32] z perspektywy historycznej). Przede wszystkim, kiedy $\alpha \in (n-1, n)$ oraz $n \in \mathbb{N}$, wtedy

$$D^\alpha f(t) = D^{\alpha-(n-1)} D^{n-1} f(t) = \frac{\{\alpha\}}{\Gamma(1-\{\alpha\})} \int_0^{+\infty} \frac{f^{(n-1)}(t) - f^{(n-1)}(t-\tau)}{\tau^{1+\{\alpha\}}} d\tau \quad (2.38)$$

gdzie $\{\alpha\} = \alpha - (n-1)$, oraz f jest funkcją wystarczająco gładką, np. $f \in C^{n-1}(\mathbb{R})$ z ograniczoną funkcją $f^{(n-1)}$. Inne podejście zakłada zamianę w liczniku różnicy pierwszego rzędu w (2.37) na różnicę n -tego rzędu $\Delta_\tau^n f(t)$

$$D^\alpha f(t) = c \int_0^{+\infty} \frac{\Delta_\tau^n f(t)}{\tau^{1+\alpha}} d\tau \quad (2.39)$$

dla odpowiedniej stałej $c > 0$. Takie podejście nie wymaga żadnych założeń dotyczących różniczkowalności funkcji f .

Przedstawmy teraz kilka najważniejszych własności pochodnej Marchaud $D^\alpha f$, przydatnych w dalszych rozważaniach.

- Jeśli $f(t)$ jest *wystarczająco dobra* (tj. $f \in C^1(\mathbb{R})$ i $f'(t)$ zniką w nieskończoności jak $|t|^{\alpha-1-\varepsilon}$ dla pewnego dodatniego $\varepsilon > 0$), to pochodne Marchaud i Riemanna-Liouville'a pokrywają się ([1], rozdział 5.4).

- Jeśli $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ jest ograniczona i lokalnie spełnia warunek Höldera z wykładnikiem $\lambda > \alpha$, to istnieje pochodna Marchaud funkcji f ([1], Sekcja 5.4). Należy zauważyć, że ten przypadek obejmuje funkcje $\sin(\omega t)$, $\cos(\omega t)$ i $e^{j\omega t}$. W rzeczywistości wystarczy, aby funkcja f była ograniczona na wszystkich przedziałach $(-\infty, a] \subset \mathbb{R}$ dla $a \in \mathbb{R}$.
- Pochodne rzędu α funkcji wykładniczej e^{st} (gdzie $s = \sigma + j\omega$, $\sigma, \omega \in \mathbb{R}$, $\sigma \geq 0$) i funkcji wykładniczej $e^{j\omega t}$ (gdzie $\omega \in \mathbb{R}$) można wyznaczyć (por. wiersze 4 i 5 w tabeli 9.2 w [1]) jako

$$D^\alpha e^{st} = s^\alpha e^{st} \quad (2.40)$$

$$D^\alpha e^{j\omega t} = (j\omega)^\alpha e^{j\omega t}. \quad (2.41)$$

Należy zauważyć, że w przypadku gdy $\sigma < 0$ w (2.40), pochodna ułamkowa $D^\alpha e^{st}$ nie jest zdefiniowana dla punktu bazowego ustawionego na $a = -\infty$, ponieważ całki podane przez (2.2) i (2.4) są rozbieżne. W przedstawionych wynikach wykorzystujemy jedynie własność (2.41), która jest wnioskiem z (2.40) dla $\sigma = 0$.

- Pochodna Riemanna-Liouville'a D^α dana wzorem (2.3) nie jest zdefiniowana dla funkcji stałej $f(t) = C$, podczas gdy pochodna Marchaud daje $D^\alpha C = 0$.
- Definicja pochodnej Marchaud (2.39) jest równoważna definicji Grünwalda-Letnikova, którą opisano w Sekcji 2.2.6 (dla szerokiej klasy funkcji, zawierających także funkcje periodyczne oraz funkcje $L^p(\mathbb{R})$ dla $p \in [1, +\infty)$ – patrz Twierdzenia 20.2 oraz 20.4 w [1]). Porównanie obydwu definicji opisane jest szczegółowo w [41].
- Pochodna Marchaud spełnia własność półgrupy, tj. $D^\beta D^\alpha f(t) = D^{\alpha+\beta} f(t)$ dla $\alpha, \beta > 0$ i dla funkcji f , gdzie pokrywa się ona z definicją Grünwalda-Letnikova (patrz dyskusja na końcu rozdziału 4 w [32]).

2.2.6. Definicja Grünwalda-Letnikova

Pochodna Grünwalda-Letnikova rzędu $\alpha > 0$ określona jest formułą ([1] wzór (20.7))

$$D^\alpha f(t) = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{1}{h^\alpha} \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \binom{\alpha}{m} f(t - mh) \quad (2.42)$$

gdzie $\binom{\alpha}{m} = \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-m+1)}{m!}$. Definicja ta spełnia warunki (2.11) ([42] Rozdział 2.6.1) oraz (2.12) ([42] wzór (2.65)). Warto zauważyć, że pochodna Grünwalda-Letnikova jest szczególnym przypadkiem ($\Theta = 1$, $\theta(\alpha) = \alpha$) pochodnej Ortigueiry-Machado (patrz rząd 1 w tabeli 1 w [43]).

Bilateralna transformacja Laplace'a pochodnej rzędu $\alpha \in (n-1, n)$ (gdzie $n \in \mathbb{N}$) funkcji $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ może być obliczona jako [42] (sekcje 2.7.3 oraz 2.8)

$$\mathcal{L}\{D^\alpha f(t)\} = s^\alpha \mathcal{L}\{f(t)\}, \quad \Re s > 0. \quad (2.43)$$

Jak było wspomniane wcześniej, definicja Grünwalda-Letnikova jest równoważna definicji Marchaud dla szerokiej klasy funkcji. Bardziej szczegółowo, definicja Marchaud w sensie (2.39) jest

równoważna definicji pochodnej Grünwalda–Letnikova. Zatem spełnia obydwie warunki (2.11) oraz (2.12). Prowadzi to więc do obserwacji, że definicja (2.38) określona poprzez równanie półgrupy

$$D^\alpha f(t) = D^{\alpha-(n-1)} D^{n-1} f(t)$$

jest równoważna definicji (2.39) (dla funkcji wystarczająco gładkich). Zatem można podsumować, że definicja Marchaud w każdej z dwóch powyższych wersji spełnia warunki (2.11) oraz (2.12).

2.2.7. Pochodne nieklasyczne

Niedawno pojawiły się prace, które odnoszą się do pewnych pochodnych z klasy pochodnych z jądrami niesingularnymi (Caputo–Fabrizio, Atangana–Baleanu i Atangana–Koca–Caputo) oraz do lokalnej pochodnej ułamkowej (tzw. *pochodnej konformalnej*).

Definicje tych pochodnych przedstawiono poniżej. Szczegóły i dalsze odniesienia zaprezentowano w [44] (pierwsze dwie pochodne występują pod nieznacznie różniącymi się nazwami, tj. odpowiednio jako Caputo–Fabrizio–Caputo i Atangana–Baleanu–Caputo). Zakładając, że $\alpha > 0$ i $\alpha \in (n-1, n)$ dla pewnego $n \in \mathbb{N}$ występują w następujących definicjach:

- Caputo–Fabrizio (z punktem bazowym ustawionym na 0)

$$D^\alpha f(t) = \frac{M(\alpha)}{n-\alpha} \int_0^t e^{-\frac{\alpha(t-\tau)}{n-\alpha}} D^n f(\tau) d\tau \quad (2.44)$$

gdzie $M(\alpha)$ jest pewnym współczynnikiem normalizującym.

- Atangana–Baleanu (z punktem bazowym ustawionym na 0)

$$D^\alpha f(t) = \frac{B(\alpha)}{n-\alpha} \int_0^t E_\alpha \left(-\alpha \frac{(t-\tau)^\alpha}{n-\alpha} \right) D^n f(\tau) d\tau \quad (2.45)$$

gdzie E_α oznacza (jednoparametrową) funkcję Mittag-Lefflera, a $B(\alpha)$ jest pewnym czynnikiem normalizującym.

- Atangana–Koca–Caputo dla $\alpha \in (0, 1)$ (z punktem bazowym ustawionym na 0)

$$D^\alpha f(t) = \frac{1}{g(\alpha)} \int_0^t E_{\alpha,\alpha}(-g(\alpha)(t-\tau)^\alpha) Df(\tau) d\tau \quad (2.46)$$

gdzie $E_{\alpha,\alpha}$ oznacza dwuparametrową funkcję Mittag-Lefflera, a $g(\alpha)$ jest pewnym czynnikiem normalizującym.

- Pochodna konformalna (ang. *conformable derivative*)

$$D^\alpha f(t) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{f(t + \epsilon t^{1-\alpha}) - f(t)}{\epsilon}. \quad (2.47)$$

Definicje te wydają się bardzo atrakcyjne ze względu na pewne zalety w porównaniu z klasycznymi definicjami pochodnych ułamkowego rzędu. Mianowicie jądro niesingularne sugeruje dostęp do szybszych i dokładniejszych metod numerycznych (metody numeryczne zwykle tracą swoją dokładność w przypadku osobliwości), podczas gdy definicje lokalne mogą być używane do budowania modeli bez efektów pamięci (co również sprawia, że rozwiązania numeryczne są znacznie łatwiejsze do wdrożenia,

ponieważ nie wymagają wielu zasobów, aby umożliwić *zagłądanie* w przeszłość). Należy jednak zauważyć, że ostatnio kilka prac kwestionowało, czy takie operatory powinny być uważane za należące do rodziny *po pochodnych ułamkowego rzędu*. Na przykład Tarasov wprowadza w [45] zasadę nielokalności dla pochodnych ułamkowych. Zasada ta głosi, że jeśli pewne równanie różniczkowe ułamkowego rzędu można wyrazić za pomocą jakiegoś innego równania różniczkowego całkowitego rzędu, to pochodna ułamkowa nie może być uważana za nielokalną, stąd (jak mówi autor) „nie może być używana do opisu procesów i systemów z nielokalnością i pamięcią”. Następnie wykazano, że lokalna definicja pochodnej konformalnej nie spełnia zasady nielokalności. Jednak bardziej zaskakujący fakt można zaobserwować dla definicji Caputo-Fabrizio rzędu $\alpha \in (0, 1)$ zdefiniowanej przez pewną całkę, która również nie spełnia zasady nielokalności. Wykazano, że pewne liniowe równanie różniczkowe z pochodną Caputo-Fabrizio jest w rzeczywistości równoważne odpowiedniemu równaniu różniczkowemu pierwszego rzędu. Powyższa równoważność jest ważna tylko dla funkcji, które są wystarczająco regularne, ale wydaje się być dobrym powodem, aby uznać takie pochodne za nic więcej niż operatory różniczkowe całkowitego rzędu. Inne argumenty związane z tą dyskusją można znaleźć w [46, 47, 48]. Zarzut podniesiony przeciwko powyższym definicjom polega na tym, że są one definiowane jako operatory całkowe z jądrami niesingularnymi (jak stwierdza autor w [49]: “Pochodne ułamkowego rzędu zdefiniowane przez jądra ciągłe są zbyt restrykcyjne”). W przypadku wszystkich pochodnych z jądrami niesingularnymi (np. Caputo-Fabrizio, Atangana-Baleanu i Atangana-Koca-Caputo) obserwuje się, że ich użycie w niektórych naturalnych problemach początkowych prowadzi jedynie do trywialnych rozwiązań [49, 50]. Z drugiej strony, w [51] zaproponowano alternatywną formę warunków początkowych, aby przezwyciężyć te trudności. Niemniej jednak, jak wspomniano w [34], żadna z pochodnych Caputo-Fabrizio i Atangana-Baleanu nie spełnia własności półgrupy (2.11) w pełnej ogólności.

Podsumowując, należy zauważyć, że zaprezentowane koncepcje pochodnej ułamkowej nie są, jak dotąd, jedynymi. Lista różnych podejść do rachunku ułamkowego jest bardzo długa. Należy tu wspomnieć o niedawnych pracach [35], [33], [34], które dokonują przeglądu różnych koncepcji pochodnych ułamkowych, podając warunki klasyfikacji operatorów do klasy pochodnych ułamkowych lub całek ułamkowych. W dalszej części będziemy mówić o wielowymiarowym rachunku ułamkowym (patrz [1], rozdział 5). Częstkowe pochodne ułamkowe są naturalnymi rozszerzeniami pochodnej jednowymiarowej, więc nie będziemy tutaj przedstawiać dokładnych definicji. Co więcej, założymy, że wszystkie funkcje $f : \mathbb{R} \times V \rightarrow \mathbb{R}$ i pola wektorowe $F : \mathbb{R} \times V \rightarrow \mathbb{R}^3$ charakteryzują się odpowiednią gładkością dla pewnej objętości $V \subset \mathbb{R}^3$. Bezpiecznym założeniem jest to, że wszystkie należą do przestrzeni $C^3(\mathbb{R} \times V)$, co oznacza, że pochodne trzeciego rzędu istnieją i są ciągłe. Oznacza to, że różniczkowanie jest przemienne, włączając pochodną ułamkową po czasie (patrz dyskusja w [1], Sekcja 24.2). Ponadto zakłada się również, że $f(\cdot, x, y, z)$ jest ograniczona dla wszystkich $(x, y, z) \in V$ na przedziałach $(-\infty, a] \subset \mathbb{R}$, dla $a \in \mathbb{R}$.

3. ZASTOSOWANIE POCHODNEJ MARCHAUD W ELEKTROMAGNETYZMIE I TEORII OBWODÓW

Pomimo licznych publikacji związanych z modelowaniem obwodów elektrycznych ułamkowego rzędu [52], [12], [13], [14], w dalszym ciągu brakuje solidnych fundamentów teoretycznych gwarantujących poprawność takiego podejścia. Klasyczna teoria obwodów opisuje równania komponentów dyskretnych (tj. rezystorów, kondensatorów czy cewek) wychodząc z quasi-statycznej (QS) aproksymacji równań Maxwella [53], [54], [55], [56]. W rezultacie wyprowadzone są nie tylko równania elementów dyskretnych, ale także warunki pozwalające na zastosowanie aproksymacji w postaci modelowania obwodowego. Do niedawna takich warunków nie sformułowano dla modeli obwodów z elementami opisanymi równaniami różniczkowo-całkowymi ułamkowego rzędu. Dyskusja w literaturze [29], [28] pokazuje, że konieczne jest spójne i przejrzyste wyprowadzenie zasad modelowania i analizy obwodów ułamkowego rzędu, mające źródło w teorii elektromagnetyzmu. Stąd pilnie potrzebne są badania związków między elektromagnetyzmem ułamkowego rzędu a teorią obwodów ułamkowego rzędu. W pracy [57] elementy skupione identyfikowane są poprzez równania Maxwella ułamkowego rzędu na podstawie impedancji charakterystycznej układu elektromagnetycznego. Jednak takie podejście nie wykorzystuje pojęć napięcia i prądu, które są typowe dla teorii obwodów. W pracy [58] równania elementów skupionych są wyprowadzane na podstawie równań Maxwella dla ośrodka opisanego przez model ułamkowego rzędu przy założeniu, że kondensator ułamkowego rzędu składa się z dwóch równoległych płyt przewodzących, cewka ułamkowego rzędu jest toroidalną ramą o prostokątnym przekroju, a rezystor ułamkowego rzędu jest cylindryczny. Jednakże te wyprowadzenia nie są poparte analizą błędów wynikających z zastosowanych przybliżeń geometrii elementów obwodów. Dlatego, badając ten temat, warto zacząć od wprowadzenia przybliżeń quasi-statycznych równań Maxwella w ośrodkach z konstytutywnymi relacjami ułamkowego rzędu. Na tej podstawie można wyprowadzić równania ułamkowego rzędu dla elementów skupionych, które są poparte przybliżonymi warunkami stosowalności. Rozważmy symetryczne równania Maxwella w dziedzinie czasu

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho_e \quad (3.1)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} - \mathbf{M} \quad (3.2)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = \rho_m \quad (3.3)$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \mathbf{J} \quad (3.4)$$

gdzie $\mathbf{E}$ oraz $\mathbf{H}$ oznaczają kolejno natężenie pola elektrycznego i magnetycznego, $\mathbf{D}$ oraz $\mathbf{B}$ oznaczają kolejno gęstość strumienia pola elektrycznego i magnetycznego, $\mathbf{J}$ oraz $\mathbf{M}$ oznaczają kolejno gęstość prądu elektrycznego i magnetycznego, ρ_e oraz ρ_m oznaczają kolejno gęstość ładunku elektrycznego i magnetycznego. Wszystkie te wielkości fizyczne są funkcjami położenia $\mathbf{r}$ i czasu t . Jednak dla związków te argumenty funkcji są pomijane, jeśli nie wprowadza to błędnej interpretacji. Chociaż prąd

magnetyczny $\mathbf{M}$ i ładunek magnetyczny ρ_m nie są wielkościami fizycznie realizowalnymi, można stosować je jako narzędzia matematyczne w analizie zagadnień promieniowania i rozpraszania [59]. Aby rozwiązać (3.1)–(3.4), potrzebne są dodatkowo relacje konstytutywne, które wiążą natężenia (tj. pola wektorowe $\mathbf{E}$ oraz $\mathbf{H}$) ze stumieniami (tj. polami wektorowymi $\mathbf{D}$ oraz $\mathbf{B}$). Rozważmy ośrodki liniowe, jednorodne i izotropowe. Gęstość prądu elektrycznego $\mathbf{J}$ jest sumą prądu źródłowego $\mathbf{J}_s$ i prądu przewodzenia $\mathbf{J}_c$, to jest

$$\mathbf{J} = \mathbf{J}_s + \mathbf{J}_c. \quad (3.5)$$

Analogicznie można również wprowadzić gęstość prądu magnetycznego jako

$$\mathbf{M} = \mathbf{M}_s + \mathbf{M}_c. \quad (3.6)$$

W następnych rozdziałach przedstawiono klasyczny sposób uzyskiwania równań w przestrzeni stanu dla równań Maxwella całkowego oraz ułamkowego rzędu.

3.1. Równania Maxwella w ośrodkach opisanych przez modele całkowego rzędu

Rezultaty prezentowane w tej i następnej sekcji są opublikowane w artykule [60], którego autor tej rozprawy jest współautorem. Rozważmy równania Maxwella w ośrodkach opisanych przez modele całkowego rzędu. W szczególności rozważmy przypadek mediów o parametrach niezależnych od czasu i punktu w przestrzeni. Załóżmy, że $\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E}$, $\mathbf{B} = \mu \mathbf{H}$ oraz $\mathbf{J}_c = \sigma_e \mathbf{E}$, $\mathbf{M}_c = \sigma_m \mathbf{H}$ (gdzie ϵ oraz μ oznaczają kolejno przenikalność elektryczną i magnetyczną ośrodka, podczas gdy σ_e oraz σ_m oznacza kolejno jego przewodność elektryczną i magnetyczną). Można więc zapisać (3.2) oraz (3.4) jako:

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\mu \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} - \sigma_m \mathbf{H} - \mathbf{M}_s \quad (3.7)$$

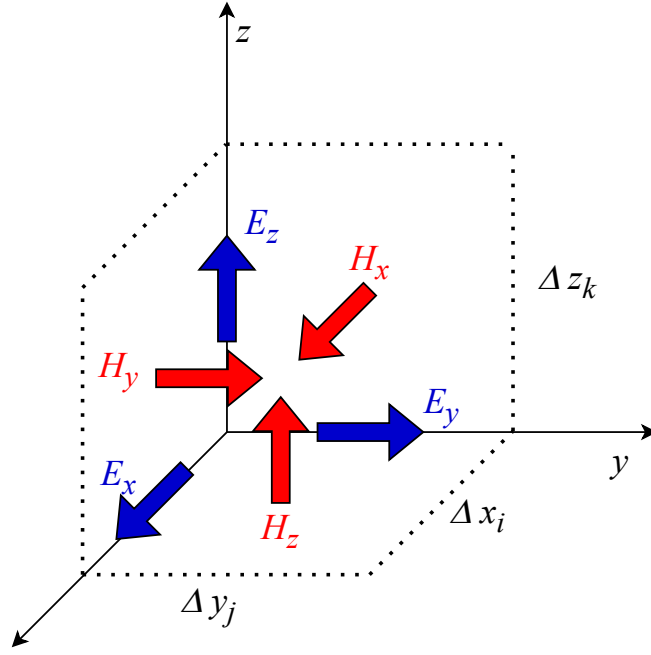
$$\nabla \times \mathbf{H} = \epsilon \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \sigma_e \mathbf{E} + \mathbf{J}_s. \quad (3.8)$$

Zakładając, że wektory $\mathbf{E} = [E_x, E_y, E_z]^T$, $\mathbf{H} = [H_x, H_y, H_z]^T$, $\mathbf{J}_s = [J_{sx}, J_{sy}, J_{sz}]^T$, $\mathbf{M}_s = [M_{sx}, M_{sy}, M_{sz}]^T$ są opisane we współrzędnych kartezjańskich, można zapisać (3.7)–(3.8) w skróconej formie

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \begin{bmatrix} \mathbf{E} \\ \mathbf{H} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -\epsilon^{-1} \sigma_e & \epsilon^{-1} [\nabla \times] \\ -\mu^{-1} [\nabla \times] & -\mu^{-1} \sigma_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{E} \\ \mathbf{H} \end{bmatrix} \\ &+ \begin{bmatrix} -\epsilon^{-1} & 0 \\ 0 & -\mu^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{J}_s \\ \mathbf{M}_s \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (3.9)$$

która naśladuje równania przestrzeni stanu znane z inżynierii sterowania. Dyskretyzując (3.9) przestrzennie z wykorzystaniem siatki Yee [61, 62] (Rys. 3.1) otrzymuje się trójwymiarowy (3-D) prostopadłościan V w przestrzeni kartezjańskiej, który rozkłada się na mniejsze komórki prostopadłościenne w następujący sposób:

$$V = \{V_{i,j,k} \in \mathbb{R}^3 : [x_i, x_{i+1}] \times [y_j, y_{j+1}] \times [z_k, z_{k+1}]\} \quad (3.10)$$



rys. 3.1. Siatka Yee.

gdzie $i = 0, \dots, N_x - 1$, $j = 0, \dots, N_y - 1$, $k = 0, \dots, N_z - 1$. W związku z tym całkowita liczba komórek w rozważanej domenie jest równa $N_x N_y N_z$, podczas gdy objętość komórki $V_{i,j,k}$ jest równa $\Delta x_i \Delta y_j \Delta z_k$, gdzie $\Delta x_i = x_{i+1} - x_i$, $\Delta y_j = y_{j+1} - y_j$, $\Delta z_k = z_{k+1} - z_k$. Należy zauważyć, że niektóre składowe pola przyjmują stałe wartości ze względu na warunki brzegowe. Dlatego ostatecznie zakładamy, że składowe E_x , E_y , E_z , H_x , H_y , H_z są próbkowane w N_{ex} , N_{ey} , N_{ez} , N_{hx} , N_{hy} , N_{hz} punktach. Następnie otrzymujemy równanie w przestrzeni stanu

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u} \quad (3.11)$$

gdzie

$$\begin{aligned} \mathbf{x} = & [(E_x)_1, \dots, (E_x)_{N_{ex}}, (E_y)_1, \dots, (E_y)_{N_{ey}}, \\ & (E_z)_1, \dots, (E_z)_{N_{ez}}, (H_x)_1, \dots, (H_x)_{N_{hx}}, \\ & (H_y)_1, \dots, (H_y)_{N_{hy}}, (H_z)_1, \dots, (H_z)_{N_{hz}}]^T \\ \mathbf{u} = & [(J_{sx})_1, \dots, (J_{sx})_{N_{ex}}, (J_{sy})_1, \dots, (J_{sy})_{N_{ey}}, \\ & (J_{sz})_1, \dots, (J_{sz})_{N_{ez}}, (M_{sx})_1, \dots, (M_{sx})_{N_{hx}}, \\ & (M_{sy})_1, \dots, (M_{sy})_{N_{hy}}, (M_{sz})_1, \dots, (M_{sz})_{N_{hz}}]^T \\ \mathbf{A} = & \begin{bmatrix} -\epsilon^{-1} \sigma_e \mathbf{I}_{N_e} & \epsilon^{-1} [\nabla \times]_D^H \\ -\mu^{-1} [\nabla \times]_D^E & -\mu^{-1} \sigma_m \mathbf{I}_{N_h} \end{bmatrix} \\ \mathbf{B} = & \begin{bmatrix} -\epsilon^{-1} \mathbf{I}_{N_e} & 0 \\ 0 & -\mu^{-1} \mathbf{I}_{N_h} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$N_e = N_{ex} + N_{ey} + N_{ez}$, $N_h = N_{hx} + N_{hy} + N_{hz}$, $\mathbf{I}_N$ oznacza jednostkową macierz kwadratową o rozmiarze $N \times N$, gdzie $[\nabla \times]_D^E$ oraz $[\nabla \times]_D^H$ są dyskretnymi odpowiednikami operatora rotacji odpowiednio dla pola elektrycznego i magnetycznego. Oznacza to, że dla rozważanej komórki $V_{i,j,k}$, operatory macierzowe aproksymują operator rotacji za pomocą ilorazów różnicowych dla wartości pól w rozpatrywanych i sąsiadujących komórkach [61, 62].

Rozmiary macierzy $[\nabla \times]_D^E$ oraz $[\nabla \times]_D^H$ to odpowiednio $N_h \times N_e$ oraz $N_e \times N_h$. Oczywiście należy założyć, że dyskretyzacja przestrzenna jest wystarczająco mała, aby dokładnie przedstawić (3.9) z użyciem (3.11) sformułowanego w dyskretnej dziedzinie przestrzennej. Ponadto, powstałe równania w przestrzeni stanu powinny zapewnić stabilne rozwiązania. Jako punkt wyjścia do badań należy przyjąć co najmniej 20 punktów przestrzennych na każdą minimalną długość fali pobudzenia [62]. Ogólnie rzecz biorąc, dyskretyzacja przestrzenna zależy od maksymalnej częstotliwości w widmie wzbudzenia, a także od struktury obiektów (np. przeszkód) znajdujących się w przestrzeni, dla której wykonywana jest symulacja.

Ograniczmy nasze rozważania do wzbudzeń pochodzących od fizycznie możliwych do zrealizowania prądów elektrycznych $\mathbf{J}_s$, tj. $\mathbf{M}_s = 0$. Następnie warto zauważyć, że system (3.11) reprezentuje sprzężenie zwrotne między dwoma systemami [63, 64, 65] (patrz Rys. 3.2)

$$\dot{\mathbf{x}}_1 = \mathbf{A}_1 \mathbf{x}_1 + \mathbf{B}_1 \mathbf{u}_1 \quad (3.12)$$

$$\mathbf{y}_1 = \mathbf{C}_1 \mathbf{x}_1 \quad (3.13)$$

gdzie

$$\mathbf{x}_1 = [(E_x)_1, \dots, (E_x)_{N_{ex}}, \\ (E_y)_1, \dots, (E_y)_{N_{ey}}, \\ (E_z)_1, \dots, (E_z)_{N_{ez}}]^T$$

$$\mathbf{u}_1 = \mathbf{u} - \mathbf{C}_2 \mathbf{x}_2$$

$$\mathbf{u} = \mathbf{J}_s$$

$$\mathbf{A}_1 = -\epsilon^{-1} \sigma_e \mathbf{I}_{N_e}$$

$$\mathbf{B}_1 = -\epsilon^{-1} \mathbf{I}_{N_e}$$

$$\mathbf{C}_1 = [\nabla \times]_D^E$$

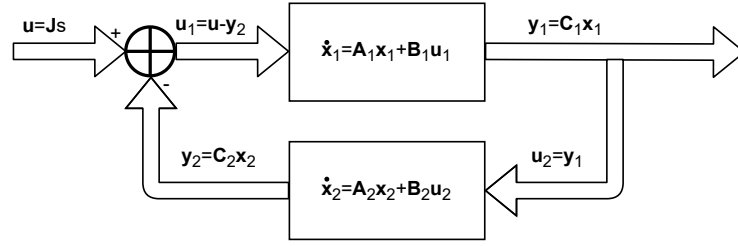
oraz

$$\dot{\mathbf{x}}_2 = \mathbf{A}_2 \mathbf{x}_2 + \mathbf{B}_2 \mathbf{u}_2 \quad (3.14)$$

$$\mathbf{y}_2 = \mathbf{C}_2 \mathbf{x}_2 \quad (3.15)$$

gdzie

$$\mathbf{x}_2 = [(H_x)_1, \dots, (H_x)_{N_{hx}}, \\ (H_y)_1, \dots, (H_y)_{N_{hy}}, \\ (H_z)_1, \dots, (H_z)_{N_{hz}}]^T$$



rys. 3.2. System elektromagnetyczny z relacjami konstytutywnymi całkowego rzędu, rozpatrywany jako połączenie dwóch systemów całkowego rzędu związanych z równaniami rotacji pola elektrycznego i magnetycznego.

$$u_2 = y_1$$

$$\mathbf{A}_2 = -\mu^{-1} \sigma_m \mathbf{I}_{N_h}$$

$$\mathbf{B}_2 = -\mu^{-1} \mathbf{I}_{N_h}$$

$$\mathbf{C}_2 = [\nabla \times]_D^H.$$

Można zauważyć, że podobny model systemu ze sprzężeniem zwrotnym dla równań Maxwella można sformułować w pojedynczym punkcie ciągłej dziedziny przestrzennej i jej otoczeniu dla systemu o parametrach rozproszonych (3.9).

3.2. Równania Maxwella w mediach opisanych przez modele ułamkowego rzędu

Modele ułamkowego rzędu są z powodzeniem stosowane w elektromagnetyzmie, gdy chce się opisać efekty pamięci i dziedziczne właściwości mediów i procesów [66]. Westerlund i Ekstam wywnioskowali na podstawie wyników eksperymentów [67], że czysto empiryczne prawo Curie [68] jest spełnione przez wszystkie dielektryki i izolatory. Oznacza to, że zastosowanie stałego napięcia V_0 do materiału dielektrycznego pomiędzy elektrodami kondensatora w momencie t daje prąd

$$i(t) = \frac{V_0}{h_1 t^\beta} \quad (3.16)$$

gdzie $t > 0$, $\beta \in (0, 1)$ opisuje straty i h_1 opisuje geometrię i parametry dielektryczne takiego kondensatora. Wzór (3.16) można uogólnić, stąd otrzymujemy

$$i(t) = C_\beta D_t^\beta v(t) \quad (3.17)$$

gdzie D_t^β oznacza pochodną ułamkowego rzędu w dziedzinie czasu, $C_\beta = \frac{\Gamma(1-\beta)}{h_1}$, $v(t) = V_0 \mathbb{1}(t)$ oraz $\mathbb{1}(t)$ oznacza funkcję skokową Heaviside'a. Rozważmy następujące relacje konstytutywne ułamkowego rzędu w elektromagnetyzmie

$$\mathbf{J} = \sigma_\alpha D_t^{1-\alpha} \mathbf{E}, \quad 0 < \alpha \leq 1 \quad (3.18)$$

$$\epsilon_\beta \mathbf{E} = D_t^{1-\beta} \mathbf{D}, \quad 0 < \beta \leq 1 \quad (3.19)$$

$$\mu_\gamma \mathbf{H} = D_t^{1-\gamma} \mathbf{B}, \quad 0 < \gamma \leq 1. \quad (3.20)$$

Dla $\alpha = 1$, $\beta = 1$ oraz $\gamma = 1$, uzyskuje się relacje konstytutywne, jak sformułowano w rozdziale 3.1, podane przez modele całkowego rzędu z przenikalnością elektryczną $\epsilon = \epsilon_1$ i przenikalnością

magnetyczną $\mu = \mu_1$. Zatem, (3.19) oraz (3.20) można uznać za rozszerzenie klasycznych modeli mediów elektromagnetycznych. Jednakże należy przyjąć następujące jednostki SI dla parametrów równania (3.19) oraz (3.20), aby uniknąć nieścisłości: $[\epsilon_\beta] = \frac{F}{s^{1-\beta}m}$, $[\mu_\gamma] = \frac{H}{s^{1-\gamma}m}$. W niniejszej pracy przyjmujemy, że operatory pochodnych ułamkowych po czasie $D_t^{1-\beta}$ i $D_t^{1-\gamma}$ są zgodne z definicją Marchaud.

Relacja konstytutywna (3.19) pomiędzy $\mathbf{D}$ oraz $\mathbf{E}$ implikuje spełnienie wzoru zaobserwowanego eksperymentalnie (3.17) dla kondensatora, co wykazano w [69]. W artykule [66] postuluje się potrzebę stosowania pochodnych ułamkowego rzędu do matematycznego modelowania systemów rzeczywistych, tj. twierdzi się, że wszystkie systemy mają pamięć wszystkich wcześniejszych zdarzeń. Stąd też wymagane jest uwzględnienie tego przebiegu wcześniejszych zdarzeń przy użyciu pochodnych ułamkowego rzędu w celu przewidywania przyszłości. Biorąc to pod uwagę, analogicznie do (3.19), klasyczna relacja pomiędzy wektorami $\mathbf{B}$ oraz $\mathbf{H}$ jest uogólniona przez (3.20). Stosując to podejście, można uzyskać modele ułamkowego rzędu cewek, które mają zastosowanie w inżynierii [69, 70].

Modele matematyczne (3.19) oraz (3.20) pozwalają na uwzględnienie strat w relacjach konstytutywnych [69, 71]. Dlatego można założyć, że $\sigma_e = 0$ oraz $\sigma_m = 0$, co prowadzi do równań Maxwella, w których występują pochodne czasowe ułamkowego rzędu

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = 0 \quad (3.21)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\mu_\gamma D_t^\gamma \mathbf{H} - \mathbf{M}_s \quad (3.22)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{H} = 0 \quad (3.23)$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = \epsilon_\beta D_t^\beta \mathbf{E} + \mathbf{J}_s. \quad (3.24)$$

Analogicznie do modelu matematycznego z pochodnymi czasowymi całkowitego rzędu (3.9), można sformułować (3.22) oraz (3.24) w formie

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} D_t^\beta & 0 \\ 0 & D_t^\gamma \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{E} \\ \mathbf{H} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 & \epsilon_\beta^{-1} [\nabla \times] \\ -\mu_\gamma^{-1} [\nabla \times] & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{E} \\ \mathbf{H} \end{bmatrix} \\ &+ \begin{bmatrix} -\epsilon_\beta^{-1} & 0 \\ 0 & -\mu_\gamma^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{J}_s \\ \mathbf{M}_s \end{bmatrix}, \end{aligned} \quad (3.25)$$

która naśladuje równania w przestrzeni stanu. Ta forma równań Maxwella z pochodnymi czasowymi ułamkowego rzędu przypomina sformułowanie elektrodynamiki oparte na wektorze Riemanna-Silbersteina [72]. Można jednak zauważyć, że powyższa formuła oparta na równaniu przestrzeni stanu jest bardziej elastyczna, ponieważ pozwala na uwzględnienie różnych rzędów pochodnych ułamkowych β oraz γ odpowiednio dla pól elektrycznego i magnetycznego. Jest to niezwykle ważna własność, ponieważ często tylko jedna z relacji konstytutywnych, albo elektryczna (3.19) albo magnetyczna (3.20) jest reprezentowana przez model ułamkowego rzędu, natomiast relacja komplementarna jest reprezentowana przez model całkowitego rzędu.

Dyskretyzację przestrzenną (3.25) można wykonać analogicznie do przypadku całkowego rzędu, co daje równanie przestrzeni stanu niecałkowego rzędu w następujący sposób:

$$\mathbf{D}\mathbf{x} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u} \quad (3.26)$$

gdzie

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} D_t^\beta & 0 \\ 0 & D_t^\gamma \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & \epsilon_\beta^{-1}[\nabla \times]_D^H \\ -\mu_\gamma^{-1}[\nabla \times]_D^E & 0 \end{bmatrix} \quad (3.27)$$

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} -\epsilon_\beta^{-1}\mathbf{I}_{N_e} & 0 \\ 0 & -\mu_\gamma^{-1}\mathbf{I}_{N_h} \end{bmatrix} \quad (3.28)$$

oraz wektory $\mathbf{x}$, $\mathbf{u}$ są definiowane jak w przypadku pochodnych całkowego rzędu. Ponownie, dyskretyzacja przestrzenna musi być wystarczająco gęsta, aby dokładnie reprezentować (3.25) z użyciem równania (3.26) sformułowanego w dyskretnej dziedzinie przestrzennej. System (3.26) reprezentuje system ze sprzężeniem zwrotnym między dwoma systemami ułamkowego rzędu, patrz Rys. 3.3

$$D_t^\beta \mathbf{x}_1 = \mathbf{B}_{f1} \mathbf{u}_1 \quad (3.29)$$

$$\mathbf{y}_1 = \mathbf{C}_{f1} \mathbf{x}_1 \quad (3.30)$$

gdzie

$$\mathbf{B}_{f1} = -\epsilon_\beta^{-1}\mathbf{I}_{N_e}$$

$$\mathbf{C}_{f1} = [\nabla \times]_D^E$$

oraz

$$D_t^\gamma \mathbf{x}_2 = \mathbf{B}_{f2} \mathbf{u}_2 \quad (3.31)$$

$$\mathbf{y}_2 = \mathbf{C}_{f2} \mathbf{x}_2 \quad (3.32)$$

gdzie

$$\mathbf{B}_{f2} = -\mu_\gamma^{-1}\mathbf{I}_{N_h}$$

$$\mathbf{C}_{f2} = [\nabla \times]_D^H.$$

Podobny model systemu ze sprzężeniem zwrotnym dla równań Maxwella z pochodnymi czasowymi ułamkowego rzędu można sformułować w pojedynczym punkcie ciągłej dziedziny przestrzennej i jej otoczeniu dla systemu o parametrach rozproszonych (3.25).

Warto zauważyć, że na podstawie równań (3.21)–(3.24), można wyprowadzić następujące równania dyfuzyjno-falowe:

$$\nabla^2 \mathbf{E} - \mu_\gamma \epsilon_\beta D_t^\gamma D_t^\beta \mathbf{E} = 0 \quad (3.33)$$

$$\nabla^2 \mathbf{H} - \mu_\gamma \epsilon_\beta D_t^\beta D_t^\gamma \mathbf{H} = 0. \quad (3.34)$$

Natężenia pola elektrycznego i magnetycznego spełniają to samo równanie falowo-dyfuzyjne wtedy i tylko wtedy, gdy $\gamma = \beta$ lub operatory ułamkowego rzędu są przemienne (tj. $D_t^\gamma D_t^\beta = D_t^\beta D_t^\gamma$). Kolejno stosując reprezentację wskazową

$$\mathbf{E} = \Re(\mathbf{E}e^{j\omega t}) \quad (3.35)$$

$$\mathbf{H} = \Re(\mathbf{H}e^{j\omega t}) \quad (3.36)$$

do równań Maxwella ułamkowego rzędu (3.21)–(3.24) otrzymujemy

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = 0 \quad (3.37)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\mu_\gamma(j\omega)^\gamma \mathbf{H} \quad (3.38)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{H} = 0 \quad (3.39)$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = \epsilon_\beta(j\omega)^\beta \mathbf{E}. \quad (3.40)$$

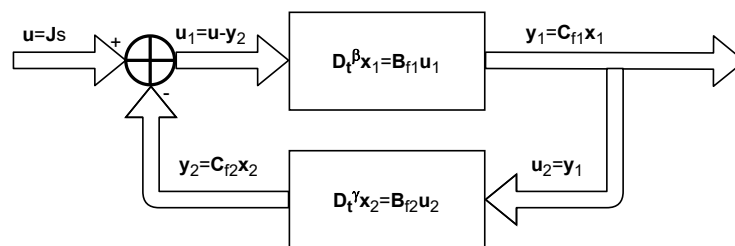
Na podstawie równań (3.37)–(3.40) można uzyskać równania dyfuzyjno-falowe w dziedzinie częstotliwości:

$$\nabla^2 \begin{Bmatrix} \mathbf{E} \\ \mathbf{H} \end{Bmatrix} - \mu_\gamma \epsilon_\beta (j\omega)^{\beta+\gamma} \begin{Bmatrix} \mathbf{E} \\ \mathbf{H} \end{Bmatrix} = 0. \quad (3.41)$$

Jak widać, niespójność wynika z faktu, że zastosowanie reprezentacji wskazowej (3.35)–(3.36) do (3.21)–(3.24) daje to samo równanie dla natężeń pola elektrycznego i magnetycznego. Z drugiej strony, natężenia pola elektrycznego i magnetycznego spełniają różne równania dyfuzyjno-falowe w dziedzinie czasu, patrz (3.33)–(3.34). Co więcej, nie można zakładać a priori, że zbiór wspólnych rozwiązań równań (3.33) i (3.34) istnieje, jak wykazano w [38]. W tym artykule można znaleźć stosunkowo prosty przykład pokazujący, że równanie $D^{\alpha+\beta}y = y$ nie jest równoważne równaniu $D^\alpha D^\beta y = y$ dla pochodnej Riemanna-Liouville'a. W przypadku definicji pochodnej ułamkowej, które spełniają zarówno równania (2.11), jak i (2.12), równania dyfuzyjno-falowe w dziedzinie czasu (3.33)–(3.34) są zgodne z formułą w dziedzinie częstotliwości (3.41). Stąd równania dyfuzyjno-falowe (3.33)–(3.34) przyjmują postać

$$\nabla^2 \begin{Bmatrix} \mathbf{E} \\ \mathbf{H} \end{Bmatrix} - \mu_\gamma \epsilon_\beta D_t^{\beta+\gamma} \begin{Bmatrix} \mathbf{E} \\ \mathbf{H} \end{Bmatrix} = 0 \quad (3.42)$$

co jest zgodne z (3.41) wyprowadzonym z reprezentacji wskazowej (3.35)–(3.36). Metody analizy w dziedzinie czasu i częstotliwości powinny zwracać równoważne wyniki po zastosowaniu do uogólnień równań Maxwella ułamkowego rzędu. W celu uzyskania równoważności wyników w dziedzinie czasu i częstotliwości, operator różniczkowy ułamkowego rzędu powinien spełniać warunki liniowości i półgrupy, a także być reprezentowalny w dziedzinie wskazów. Spośród najpopularniejszych definicji tj. Riemanna-Liouville, Caputo, Grünwalda-Letnikova oraz Marchaud, tylko dwie ostatnie z nich uwzględniają całą historię czasową funkcji wejściowej i są odpowiednimi wyborami dla teorii elektromagnetyzmu. Pochodne Riemanna-Liouville'a i Caputo ze skończonym punktem bazowym mają ograniczoną stosowność, podczas gdy definicje Grünwalda-Letnikova i Marchaud (które są w rzeczywistości równoważne) prowadzą do rozsądnych uogólnień równań Maxwella.



rys. 3.3. System elektromagnetyczny z relacjami konstytutywnymi ułamkowego rzędu, rozpatrywany jako połączenie dwóch systemów ułamkowego rzędu związanych z równaniami rotacji pola elektrycznego i magnetycznego.

3.3. Elektromagnetyzm i elementy obwodów ułamkowego rzędu

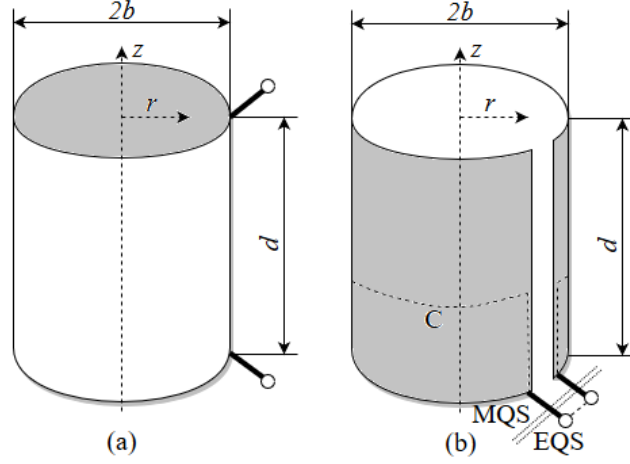
W tej sekcji, w oparciu o prace [69, 73], przedstawiono kompleksowe wyprowadzenia równań elementów obwodów ułamkowego rzędu, które bazują na wcześniej omówionym elektromagnetyzmie ułamkowego rzędu. Takie podejście opiera się na quasi-statycznych aproksymacjach równań Maxwella w ośrodkach opisanych relacjami konstytutywnymi ułamkowego rzędu. W szczególności rozróżnia się przybliżenia elektro-quasi-statyczne, tj. gdy $\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \approx 0$, i magneto-quasi-statyczne, tj. gdy $\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \approx 0$, równań Maxwella (3.2) i (3.4). W rezultacie autorzy uzyskali nie tylko równania elementów skupionych ułamkowego rzędu dla rezystorów, kondensatorów i cewek, ale także warunki, dla których możliwe jest modelowanie obwodowe.

Ogólnie rzecz biorąc, modelowanie elementów obwodów ułamkowego rzędu możliwe jest wówczas, gdy rozmiar kondensatora lub cewki ułamkowego rzędu jest znacznie mniejszy niż długość fali elektromagnetycznej. Jeśli kondensator lub cewka ułamkowego rzędu spełnia powyższy warunek wówczas, odpowiednio, zgromadzona energia pola magnetycznego lub elektrycznego jest pomijalna w porównaniu z energią pola elektrycznego lub magnetycznego w rozpatrywanym elemencie ułamkowego rzędu. Ponadto parametry *pseudopojemności* i *pseudoindukcyjności* (używa się terminu *pseudo* w odniesieniu do tych elementów ułamkowego rzędu, gdyż te parametry stają się tymi znanymi z teorii obwodów, gdy rząd pochodnej ułamkowej staje się jednością) można wyznaczyć przy założeniu równości mocy obliczonych za pomocą wzorów obwodowych i elektromagnetycznych.

W kolejnych rozdziałach przedstawiono podstawowe elementy obwodów ułamkowego rzędu dla szczególnego przypadku geometrii cylindrycznej, patrz Rys. 3.4. Wyprowadzenia te rozszerzają wyniki z [74] o quasi-statyczne warunki stosowalności pochodnych ułamkowego rzędu dla kondensatora i cewki indukcyjnej. Przedstawione wyprowadzenia ograniczone są geometrią rozpatrywanych elementów. Ograniczenia tego pozbawione są wyprowadzenia przedstawione w pracy [69].

3.3.1. Rezystor

Niech przybliżenie elektro-quasi-statyczne będzie zastosowane do rezystora przedstawionego na Rys. 3.4a. Załóżmy stałe pole elektryczne E_z w kierunku z . Gęstość prądu jest powiązana z natężeniem pola elektrycznego poprzez postulowane wyrażenie $\mathbf{J} = \sigma_\alpha D_t^{1-\alpha} \mathbf{E}$, gdzie $\alpha \in (0, 1]$ (równanie (9) w



rys. 3.4. Geometrie rozpatrywanych elementów obwodu. (a) Rezystor i kondensator. (b) Cewka. Rysunek zaczerpnięto z [73] za zgodą autorów.

[74]). Napięcie między zaciskami rezystora jest dane wzorem

$$v(t) = \int_0^d \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = E_z d \quad (3.43)$$

ponieważ pole elektryczne jest potencjalne w przybliżeniu elektro-quasi-statycznym (tj. $\nabla \times \mathbf{E} = 0$).

Prąd płynący przez rezystor ułamkowego rzędu jest określony wzorem

$$i(t) = \int_{S_1} \mathbf{J} \cdot d\mathbf{a} = \int_{S_1} \sigma_\alpha D_t^{1-\alpha} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{a} = \sigma_\alpha D_t^{1-\alpha} E_z S. \quad (3.44)$$

Na podstawie (3.43) oraz (3.44), otrzymujemy

$$i(t) = G_\alpha D_t^{1-\alpha} v(t) \quad (3.45)$$

gdzie $G_\alpha = \sigma_\alpha \frac{S}{d}$ nazywa się *pseudokonduktancją*. Wówczas można zdefiniować *pseudorezystancję* jako $R_\alpha = G_\alpha^{-1}$.

3.3.2. Kondensator

Zastosujmy przybliżenie elektro-quasi-statyczne do kondensatora przedstawionego na Rys. 3.4a. Zakładając ponownie stałe pole elektryczne E_z w kierunku z , napięcie między zaciskami kondensatora jest dane wzorem (3.43), a ładunek na pojedynczej elektrodzie wzorem

$$q = \oint_{S_1} \mathbf{D} \cdot d\mathbf{a} = \oint_{S_1} D_t^{\beta-1} \epsilon_\beta \mathbf{E} \cdot d\mathbf{a} = \epsilon_\beta D_t^{\beta-1} E_z S. \quad (3.46)$$

Otrzymamy zatem

$$i(t) = \frac{dq}{dt} = C_\beta D_t^\beta v(t) \quad (3.47)$$

gdzie $C_\beta = \epsilon_\beta \frac{S}{d}$ nazywa się *pseudopojemnością*.

Obliczmy teraz pole magnetyczne wewnątrz rozważanego kondensatora, wynikające ze zmiennego w czasie quasi-statycznego pola elektrycznego. Prawo Ampere'a (3.4) w postaci całkowej

jest określone następująco

$$\oint_{C=\partial S} \mathbf{H} \cdot d\mathbf{s} = \frac{\partial}{\partial t} \int_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{a} \quad (3.48)$$

gdzie ścieżka całkowania C jest przedstawiona na rys. 3.5a. Następnie, korzystając z (3.19), otrzymujemy

$$\oint_{C=\partial S} \mathbf{H} \cdot d\mathbf{s} = \epsilon_\beta D_t^\beta \int_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{a}. \quad (3.49)$$

Dla tej cylindrycznie symetrycznej konfiguracji równanie (3.49) zapisuje się jako

$$H_\phi 2\pi r = \epsilon_\beta D_t^\beta E_0 \pi r^2 \quad (3.50)$$

gdzie H_ϕ to natężenie pola magnetycznego wzdłuż kierunku współrzędnych azymutalnych, E_0 to natężenie quasi-statycznego pola elektrycznego wzbudzającego kondensator na krawędziach zewnętrznych, a r to odległość radialna od osi z w cylindrycznym układzie współrzędnych. Z (3.50) otrzymujemy

$$H_\phi = \frac{\epsilon_\beta r}{2} D_t^\beta E_0. \quad (3.51)$$

W kolejnym kroku obliczamy pole elektryczne wynikające ze zmiennego w czasie pola magnetycznego (3.51), korzystając z prawa Faradaya (3.2) w postaci całkowej

$$\oint_{C=\partial S} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = -\frac{\partial}{\partial t} \int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{a} \quad (3.52)$$

gdzie ścieżka całkowania C jest przedstawiona na Rys. 3.5b. Następnie, korzystając z (3.20), otrzymujemy

$$\oint_{C=\partial S} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = -\mu_\gamma D_t^\gamma \int_S \mathbf{H} \cdot d\mathbf{a}. \quad (3.53)$$

Dla ścieżki C na Rys. 3.5b, równanie (3.53) jest rozwiązywane jako

$$[E_z(b) - E_z(r)]d = \mu_\gamma D_t^\gamma \int_r^b dr' \int_0^d dz \frac{\epsilon_\beta r'}{2} D_t^\beta E_0. \quad (3.54)$$

Natężenie pola $E_z(b)$ na zewnętrznej krawędzi kondensatora cylindrycznego jest ograniczone przez źródła do E_0 [54]. W ten sposób otrzymujemy

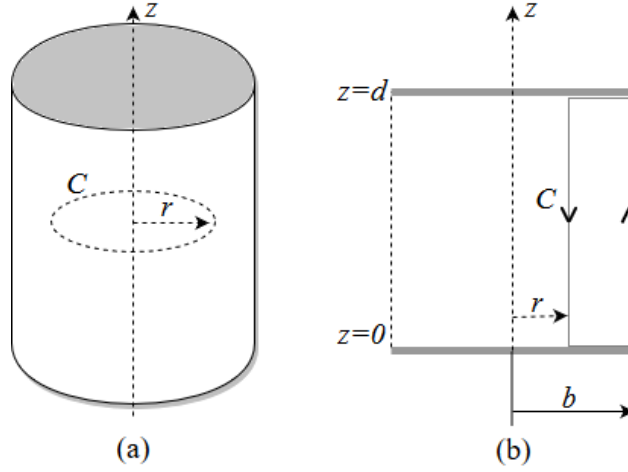
$$E_z(r) = E_0 - \frac{\epsilon_\beta \mu_\gamma}{4} (b^2 - r^2) D_t^{\beta+\gamma} E_0. \quad (3.55)$$

Jak widać, pole elektryczne przy $r \neq b$ różni się od pola E_0 na krawędzi kondensatora. Obliczmy błąd między rozwiązaniem quasi-statycznym a (3.55). W tym celu wykorzystamy reprezentację wskazową pola elektrycznego o częstotliwości kątowej ω , tj. $E_0 = \Re(\tilde{E}_0 e^{j\omega t})$. Możemy tak zrobić, gdyż zastosowaliśmy definicję Marchaud pochodnej ułamkowej w tych rozważaniach. Zatem maksymalną wartość błędu ($r = 0$) uzyskuje się za pomocą (2.41), tj.

$$\left| \frac{\tilde{E}_{error}}{\tilde{E}_0} \right| = \frac{\epsilon_\beta \mu_\gamma}{4} b^2 \omega^{\beta+\gamma}. \quad (3.56)$$

Aby zastosować przybliżenie quasi-statyczne teorii obwodów, wymagane jest aby $\left| \frac{\tilde{E}_{error}}{\tilde{E}_0} \right| \ll 1$. W ten sposób uzyskuje się warunek na rozmiar kondensatora cylindrycznego ułamkowego rzędu

$$b \ll \frac{2v_{\beta\gamma}}{\omega^{\frac{\beta+\gamma}{2}}} \quad (3.57)$$



rys. 3.5. Ścieżki całkowania dla rozpatrywanego kondensatora. Rysunek zaczerpnięto z [73] za zgodą autorów.

gdzie $v_{\beta\gamma} = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_\beta \mu_\gamma}}$. Jeśli $\beta = \gamma = 1$, wówczas otrzymujemy klasyczny warunek [54] dla zasadności przybliżenia obwodowego

$$b \ll \frac{2v}{\omega} \quad (3.58)$$

gdzie $v = \frac{1}{\sqrt{\epsilon\mu}}$ oznacza prędkość fali elektromagnetycznej. Warunek (3.58) można zapisać jako [54]

$$b \ll \frac{\lambda}{\pi} \quad (3.59)$$

gdzie λ oznacza długość fali elektromagnetycznej. Jeśli założymy, że wartość liczbową $v_{\beta\gamma}$ jest porównywalna z v w kondensatorze ułamkowego rzędu ($\frac{m}{s(\beta+\gamma)/2}$ jest nadal jednostką SI dla $v_{\beta\gamma}$), to warunek (3.58) jest silniejszy niż (3.57). Oznacza to, że warunek (3.59) można rozszerzyć na obwody rzędu ułamkowego, tj. rozmiar kondensatora ułamkowego rzędu znacznie mniejszy niż długość fali elektromagnetycznej pozwala na zastosowanie modelowania obwodowego.

3.3.3. Cewka

Rozważmy jednozwojową cewkę, której zaciski połączone są przez powierzchnię ograniczoną konturem C , składającą się z idealnego przewodnika elektrycznego (ang. *perfect electric conductor* – skrót PEC), patrz Rys. 3.4b. Przybliżenie magneto-quasi-statyczne jest stosowane do cewki jednozwojowej, natomiast przybliżenie elektro-quasi-statyczne jest stosowane do jej zacisków. Załóżmy pole magnetyczne H_z wzdłuż kierunku z . Stosujemy prawo Faradaya (3.53) w postaci całkowej do ścieżki C wzdłuż materiału PEC cewki i między jej zaciskami. Ponieważ pole elektryczne w PEC jest równe zero, otrzymujemy napięcie $v(t)$ między zaciskami cewki indukcyjnej, dane wzorem:

$$v(t) = \mu_\gamma D_t^\gamma \int_S \mathbf{H} \cdot d\mathbf{a} = \mu_\gamma D_t^\gamma H_z S. \quad (3.60)$$

Z drugiej strony, pole magnetyczne wewnątrz cewki indukcyjnej jednozwojowej można obliczyć z quasi-statycznego prawa Ampère'a jako

$$\mathbf{H} = H_z \mathbf{i}_z = \frac{i(t)}{d} \mathbf{i}_z \quad (3.61)$$

gdzie $i(t)$ oznacza prąd cewki. Z (3.60) i (3.61) otrzymujemy

$$v(t) = L_\gamma D_t^\gamma i(t) \quad (3.62)$$

gdzie $L_\gamma = \mu_\gamma \frac{S}{d}$ jest nazywane pseudoinduktancją.

Obliczmy teraz pole elektryczne wewnątrz cewki, wynikające ze zmiennego w czasie quasi-statycznego pola magnetycznego. Rozważana cewka jest dualna do wcześniej rozważanego kondensatora. Zatem prawo Faradaya (3.53) stosuje się wzdłuż ścieżki C na Rys. 3.6a. Następnie otrzymujemy

$$E_\phi = -\frac{\mu_\gamma r}{2} D_t^\gamma H_0 \quad (3.63)$$

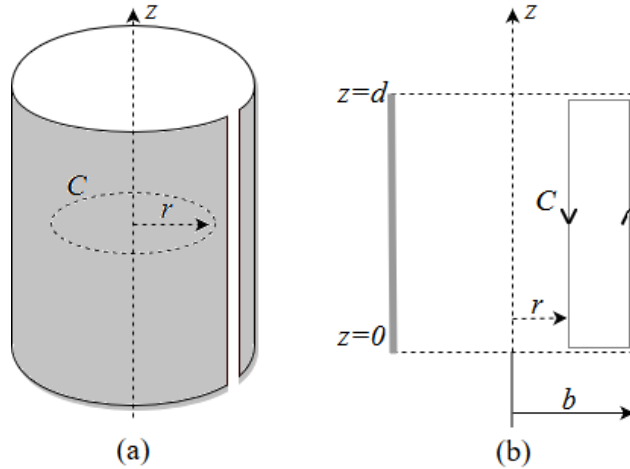
gdzie H_0 oznacza quasi-statyczne pole magnetyczne na krawędzi cewki. Stosując prawo Ampère'a (3.49), wzdłuż ścieżki C przedstawionej na Rys. 3.6b, oblicza się pole magnetyczne wywołane przez zmienne w czasie pole elektryczne (3.63)

$$-[H_z(b) - H_z(r)]d = \epsilon_\beta D_t^\beta \int_r^b dr' \int_0^d dz \left(-\frac{\mu_\gamma r'}{2} D_t^\gamma H_0 \right). \quad (3.64)$$

Jednak $H_0 = H_z(b)$, a następnie otrzymujemy

$$H_z(r) = H_0 - \frac{\epsilon_\beta \mu_\gamma}{4} (b^2 - r^2) D_t^{\beta+\gamma} H_0. \quad (3.65)$$

Jak widać, pole magnetyczne przy $r \neq b$ różni się od pola H_0 na krawędzi cewki. Podobnie jak



rys. 3.6. Ścieżki całkowania dla rozważanej cewki. Rysunek zaczerpnięto z [73] za zgodą autorów.

w przypadku kondensatora, do obliczenia błędu używamy reprezentacji wskazowej pola magnetycznego, stąd

$$\left| \frac{\tilde{H}_{error}}{\tilde{H}_0} \right| = \frac{\epsilon_\beta \mu_\gamma}{4} b^2 \omega^{\beta+\gamma}. \quad (3.66)$$

Jest to ten sam wzór, co w przypadku kondensatora ułamkowego rzędu. Zatem warunek (3.57) można rozszerzyć na cewkę ułamkowego rzędu, co pozwala na zastosowanie przybliżenia quasi-statycznego w modelowaniu obwodu. Jeśli $\beta = \gamma = 1$, wówczas otrzymujemy warunki (3.58), (3.59) dla przybliżenia obwodowego. Jeśli można założyć, że wartość liczbową $v_{\beta\gamma}$ jest porównywalna z v w cewce ułamkowego

rzędu, to (3.58) jest silniejszym warunkiem niż (3.57). W związku z tym rozmiar cewki indukcyjnej ułamkowego rzędu znacznie mniejszy niż długość fali elektromagnetycznej pozwala na zastosowanie modelowania obwodowego.

3.4. Metoda energetyczna wyznaczania parametrów elementów skupionych ułamkowego rzędu

Zakładając równość mocy elektromagnetycznej przepływającej przez element obwodu i obliczając ją jako iloczyn prądu i napięcia, można również uzyskać wzory na pseudopojemność i pseudoindukcyjność.

3.4.1. Kondensator

Obliczmy moc elektromagnetyczną przepływającą do kondensatora ułamkowego rzędu na podstawie rozwiązania quasi-statycznego, tj. $\mathbf{E} = E_z \mathbf{i}_z = \frac{v(t)}{d} \mathbf{i}_z$ i $\mathbf{H} = H_\phi \mathbf{i}_\phi$ (patrz (3.51)). Stąd otrzymujemy

$$-\oint_S \mathbf{E} \times \mathbf{H} \cdot d\mathbf{a} = \epsilon_\beta \frac{S}{d} v(t) D_t^\beta v(t) \quad (3.67)$$

gdzie $S = \pi b^2$, a S jest powierzchnią okładek kondensatora. Z drugiej strony, moc magazynowana i rozpraszana w elemencie obwodu opisanym wzorem (3.47) jest dana wzorem

$$p(t) = i(t)v(t) = C_\beta v(t) D_t^\beta v(t). \quad (3.68)$$

Równość mocy obliczonych za pomocą (3.67) i (3.68) daje wzór na pseudopojemność, tj. $C_\beta = \epsilon_\beta \frac{S}{d}$.

3.4.2. Cewka

Analogicznie obliczmy moc elektromagnetyczną przepływającą do cewki ułamkowego rzędu na podstawie rozwiązania quasi-statycznego (3.61) i wzoru (3.63). Stąd otrzymujemy odpowiednio

$$-\oint_S \mathbf{E} \times \mathbf{H} \cdot d\mathbf{a} = \mu_\gamma \frac{S}{d} i(t) D_t^\gamma i(t) \quad (3.69)$$

gdzie $S = \pi b^2$, a S jest powierzchnią do granicy cewki. Z drugiej strony, moc magazynowana i rozpraszana w elemencie obwodu opisanym wzorem (3.62) jest dana wzorem

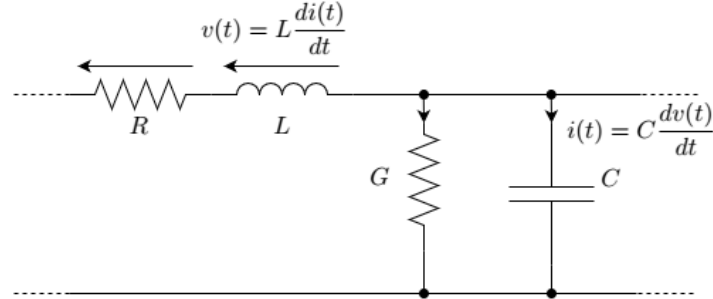
$$p(t) = i(t)v(t) = L_\gamma i(t) D_t^\gamma i(t). \quad (3.70)$$

Równość mocy obliczonych za pomocą (3.69) i (3.70) daje wzór na pseudoindukcyjność, tj. $L_\gamma = \mu_\gamma \frac{S}{d}$.

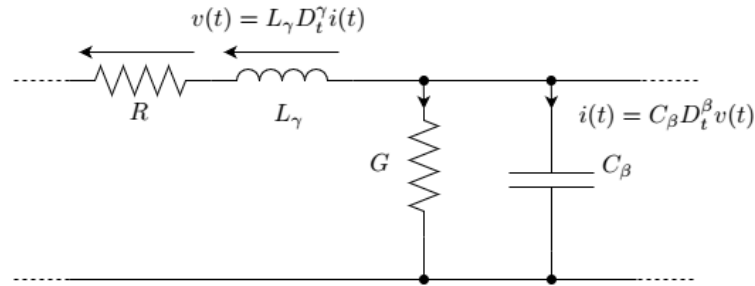
3.5. Linie transmisyjne ułamkowego rzędu

Rezultaty prezentowane w tej sekcji są opublikowane w artykułach [75, 25, 76], których autor tej rozprawy jest współautorem. Model całkowitego rzędu jest w stanie opisać charakterystyki linii transmisyjnej w ograniczonym zakresie częstotliwości. Wynika to z faktu, że dla częstotliwości terahercowych przewodnik wykazuje zarówno dyspersję częstotliwościową, jak i przestrzenną [77, 78]. Stąd pojęcie strat w tradycyjnym modelu RLGC z elementami całkowitego rzędu (patrz Rys. 3.7) staje

się niewystarczające, jeśli chcemy opisać dyspersję i efekty nie-quasi-statyczne. Może to dodatkowo powodować problemy z przyczynowością podczas analizy w dziedzinie czasu. Jednak model ułamkowego rzędu RLGC linii transmisyjnej (patrz Rys. 3.8) [77, 78, 79, 80] może opisać te efekty w zakresie częstotliwości terahercowych.



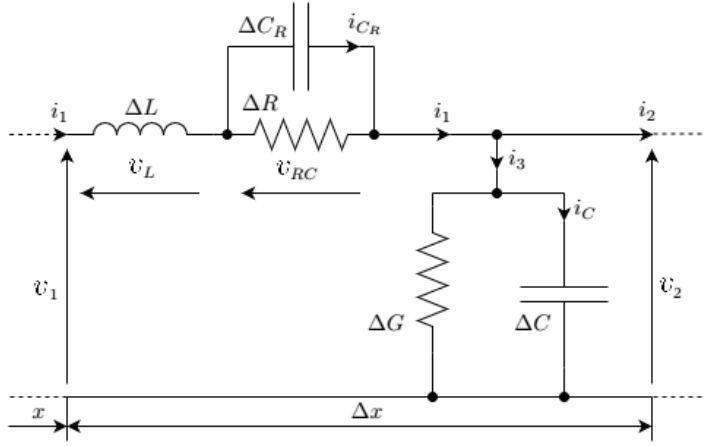
rys. 3.7. Komórka jednostkowa modelu linii transmisyjnej całkowitego rzędu.



rys. 3.8. Komórka jednostkowa modelu linii transmisyjnej ułamkowego rzędu.

W [77, 78] opracowano przyczynowy i zwarty model linii transmisyjnej ułamkowego rzędu dla częstotliwości terahercowych dla układu scalonego CMOS. Ze względu na uwzględnienie strat zależnych od częstotliwości i efektów nie-quasi-statycznych, zaobserwowano dobrą zgodność impedancji charakterystycznej między modelem ułamkowego rzędu a pomiarami do 110 GHz. Tradycyjny model całkowitego rzędu RLGC zapewnił zgodność między modelem a pomiarami tylko do 10 GHz. Wyniki te wyraźnie pokazują zalety modelowania ułamkowego rzędu linii transmisyjnych. W [77, 78], zastosowano pochodną ułamkowego rzędu, która gwarantuje odpowiednie (z punktu widzenia teorii obwodów) właściwości w dziedzinie częstotliwości. Autorzy stosują definicję Riemanna-Liouville'a z punktem bazowym w $-\infty$, ale jej właściwości w dziedzinie Fouriera faktycznie implikują, że stosowana jest definicja Grünwalda-Letnikova. Jednakże, jak pokazano powyżej, modelowanie obwodowe linii transmisyjnych ułamkowego rzędu może być problematyczne ze względu na mnogość definicji operatorów pochodnych ułamkowego rzędu. Stąd nie każda pochodna ułamkowego rzędu może być stosowana w rozsądny sposób do modelowania obwodowego.

Rozważmy model ułamkowego rzędu linii transmisyjnej RLGC zaproponowany w [80]. Jego elementarną komórkę o długości Δx przedstawiono na Rys. 3.9. Stosując prądowo-napięciowe prawa



rys. 3.9. Komórka jednostkowa rozważanej linii transmisyjnej RLGC ułamkowego rzędu.

Kirchhoffa, można uzyskać następujący zestaw równań do jej opisu:

$$i_1 = \frac{v_{RC}}{\Delta R} + i_{C_R} \quad (3.71)$$

$$i_1 = i_2 + i_3 \quad (3.72)$$

$$i_3 = i_C + \Delta G v_2 \quad (3.73)$$

$$v_L + v_{RC} + v_2 - v_1 = 0. \quad (3.74)$$

Dla elementów obwodu przedstawionych na Rys. 3.9 przyjęto następujące relacje ułamkowego rzędu pomiędzy napięciami i prądami:

$$v_L = \Delta L D_t^\alpha i_1 \quad (3.75)$$

$$i_{C_R} = \Delta C_R D_t^\beta v_{RC} \quad (3.76)$$

$$i_C = \Delta C D_t^\gamma v_2. \quad (3.77)$$

Napięcia i prądy na krawędziach komórki jednostkowej na Rys. 3.9 są dane wzorami

$$i_1 = i(x, t) \quad (3.78)$$

$$i_2 = i(x + \Delta x, t) \quad (3.79)$$

$$v_1 = v(x, t) \quad (3.80)$$

$$v_2 = v(x + \Delta x, t). \quad (3.81)$$

Zestaw równań różniczkowych ułamkowego rzędu [80] można sformułować na podstawie (3.71)–(3.81), zakładając, że $\Delta x \rightarrow 0$, tj.

$$Ri(x, t) = v'(x, t) + \tau D_t^\beta v'(x, t) \quad (3.82)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} i(x, t) = -C D_t^\gamma v(x, t) - G v(x, t) \quad (3.83)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} v(x, t) = -L D_t^\alpha i(x, t) - v'(x, t). \quad (3.84)$$

W równaniu (3.82)–(3.84) parametry są zdefiniowane jako: $L = \Delta L / \Delta x$, $R = \Delta R / \Delta x$, $C = \Delta C / \Delta x$, $G = \Delta G / \Delta x$, $\tau = \Delta R \Delta C_R$, $v'(x, t) = v_{RC}(x, t) / \Delta x$, wszystkie dla $\Delta x \rightarrow 0$. Ten układ równań jest rozwiązywany przy spełnieniu następujących warunków brzegowych i początkowych:

$$v'(x, 0) = 0, \quad i(x, 0) = 0, \quad v(x, 0) = 0, \quad x \geq 0 \quad (3.85)$$

$$v(0, t) = v_0(t), \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} v(x, t) = 0, \quad t > 0. \quad (3.86)$$

W naszych badaniach bierzemy pod uwagę (3.82)–(3.86) po normalizacji [80], tj.

$$\frac{R}{L} \left(\frac{C}{G} \right)^{\frac{\alpha}{\gamma}} \bar{i}(\bar{x}, \bar{t}) = \bar{v}'(\bar{x}, \bar{t}) + \bar{\tau} D_{\bar{t}}^{\beta} \bar{v}'(\bar{x}, \bar{t}) \quad (3.87)$$

$$\frac{\partial}{\partial \bar{x}} \bar{i}(\bar{x}, \bar{t}) = -D_{\bar{t}}^{\gamma} \bar{v}(\bar{x}, \bar{t}) - \bar{v}(\bar{x}, \bar{t}) \quad (3.88)$$

$$\frac{\partial}{\partial \bar{x}} \bar{v}(\bar{x}, \bar{t}) = -D_{\bar{t}}^{\alpha} \bar{i}(\bar{x}, \bar{t}) - \bar{v}'(\bar{x}, \bar{t}) \quad (3.89)$$

$$\bar{v}'(\bar{x}, 0) = 0, \quad \bar{i}(\bar{x}, 0) = 0, \quad \bar{v}(\bar{x}, 0) = 0, \quad \bar{x} \geq 0 \quad (3.90)$$

$$\bar{v}(0, \bar{t}) = \bar{v}_0(\bar{t}), \quad \lim_{\bar{x} \rightarrow +\infty} \bar{v}(\bar{x}, \bar{t}) = 0, \quad \bar{t} > 0 \quad (3.91)$$

gdzie $T = (C/G)^{\frac{1}{\gamma}}$, $l = T^{\frac{\alpha}{\gamma}} / \sqrt{LG}$, $\bar{t} = t/T$, $\bar{x} = x/l$, $\bar{\tau} = \tau/T^{\beta}$, $\bar{v} = v/V$, $\bar{v}' = v'l/V$, $I = VT^{\frac{\alpha}{\gamma}} \sqrt{G/L}$, $\bar{i} = i/I$.

3.5.1. Równania telegrafistów ułamkowego rzędu

Rozważmy linię transmisyjną przedstawioną na Rys. 3.8, która jest szczególnym przypadkiem linii transmisyjnej przedstawionej na Rys. 3.9. Wówczas napięcie $v = v(x, t)$ i prąd $i = i(x, t)$ wzdłuż linii w kierunku x są rozwiązaniami następującego zestawu równań:

$$\frac{\partial v}{\partial x} = -Ri - L_{\gamma} D_t^{\gamma} i \quad (3.92)$$

$$\frac{\partial i}{\partial x} = -Gv - C_{\beta} D_t^{\beta} v \quad (3.93)$$

gdzie $\gamma, \beta \in (0, 1]$ są stałymi parametrami. Różniczkując oba równania względem x i podstawiając (3.92) do (3.93) i odwrotnie (z wykorzystaniem własności $D_x D_t^{\alpha} = D_t^{\alpha} D_x$), uzyskujemy równania telegraficzne ułamkowego rzędu [80]

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = RGv + RC_{\beta} D_t^{\beta} v + L_{\gamma} G D_t^{\gamma} v + L_{\gamma} C_{\beta} D_t^{\gamma} D_t^{\beta} v \quad (3.94)$$

$$\frac{\partial^2 i}{\partial x^2} = RG i + RC_{\beta} D_t^{\beta} i + L_{\gamma} G D_t^{\gamma} i + L_{\gamma} C_{\beta} D_t^{\beta} D_t^{\gamma} i, \quad (3.95)$$

które nie są tożsame w sytuacji, gdy operatory pochodnej D_t^{γ} i D_t^{β} nie komutują, tzn. gdy $D_t^{\gamma} D_t^{\beta} \neq D_t^{\beta} D_t^{\gamma}$. Rozważmy reprezentację napięcia i prądu wskazowego wzdłuż linii transmisyjnej

$$v = \Re(V e^{j\omega t}) \quad (3.96)$$

$$i = \Re(I e^{j\omega t}) \quad (3.97)$$

gdzie $V = V(x)$ i $I = I(x)$ są odpowiednio wskazami napięcia i prądu, które są funkcjami tylko zmiennej przestrzennej x , a ω oznacza pulsację. Na podstawie (3.92) oraz (3.93) otrzymujemy następujące równania opisujące linię transmisyjną ułamkowego rzędu w dziedzinie częstotliwości:

$$\frac{\partial V}{\partial x} = -[R + (j\omega)^\gamma L_\gamma]I \quad (3.98)$$

$$\frac{\partial I}{\partial x} = -[G + (j\omega)^\beta C_\beta]V. \quad (3.99)$$

Podstawiając (3.98) do (3.99) i odwrotnie, otrzymujemy następujące równania telegraficzne (zwane również równaniami telegrafistów, ang. *telegraph equations* lub *telegrapher's equations*) w dziedzinie częstotliwości:

$$\frac{\partial^2 V}{\partial^2 x} = [R + (j\omega)^\gamma L_\gamma][G + (j\omega)^\beta C_\beta]V \quad (3.100)$$

$$\frac{\partial^2 I}{\partial^2 x} = [R + (j\omega)^\gamma L_\gamma][G + (j\omega)^\beta C_\beta]I. \quad (3.101)$$

Okazuje się, że wskaz napięcia i prądu spełniają to samo równanie w dziedzinie częstotliwości. Jednak problem rozpatrywany w dziedzinie czasu prowadzi do różnych równań dla napięcia (3.94) i prądu (3.95) wzdłuż linii, gdy $D_t^\gamma D_t^\beta \neq D_t^\beta D_t^\gamma$. Dla definicji pochodnej ułamkowej, która spełnia zarówno (2.11), jak i (2.12), równania telegraficzne ułamkowego rzędu w dziedzinie czasu (3.94)–(3.95) są spójne ze sformułowaniem w dziedzinie częstotliwości (3.100)–(3.101). W związku z tym własność półgrupy (2.11) jest wymagana do analizy obwodów o parametrach rozłożonych, reprezentujących linie transmisyjne ułamkowego rzędu. Pochodna Marchaud spełnia zarówno (2.11), jak i (2.12), więc może być z powodzeniem stosowana do analizy opisanych powyżej linii transmisyjnych ułamkowego rzędu.

4. METODY ROZWIĄZYWANIA ZAGADNIEŃ ELEKTROMAGNETYZMU I TEORII OBWODÓW OPISANYCH RÓWNANIAMI RÓŻNICZKOWO-CĄŁKOWYMI UŁAMKOWEGO RZĘDU

W niniejszym rozdziale zostaną przedstawione metody rozwiązywania zagadnień elektromagnetyzmu i teorii obwodów, które opisują równania różniczkowo-cąłkowe ułamkowego rzędu. **Rezultaty prezentowane w tym rozdziale są opublikowane w artykułach [76, 60, 81, 82], których autor tej rozprawy jest współautorem.**

4.1. Metoda rozwiązywania równań linii transmisyjnej

Prezentowana metoda umożliwia symulację propagacji sygnału wzdłuż linii transmisyjnych ułamkowego rzędu. Wykorzystuje ona obliczenia w dziedzinie częstotliwości, tj. transformację pobudzenia analitycznego do dziedziny częstotliwości, mnożenie przez współczynniki fazowe i ponowną transformację do dziedziny czasu. Metoda jest numerycznie wydajna i dokładna. Jednakże jej stosowalność jest ograniczona przez twierdzenie o próbkowaniu. Pomijając dodatkowe oznaczenia nad zmiennymi i parametrami (tj. linie) w równaniach (3.87)–(3.91), możliwa jest transformacja równań do dziedziny częstotliwości. Rozważmy reprezentację wskazową napięcia i prądu wzdłuż linii transmisyjnej

$$v(x, t) = \Re(V(x)e^{j\omega t}) \quad (4.1)$$

$$i(x, t) = \Re(I(x)e^{j\omega t}). \quad (4.2)$$

W równaniu (4.1)–(4.2), $V(x)$ i $I(x)$ to odpowiednio fazory napięcia i prądu, które są funkcjami tylko zmiennej przestrzennej x , a ω oznacza pulsację. Z równań (3.87)–(3.89) otrzymujemy

$$\frac{R}{L} \left(\frac{C}{G} \right)^{\frac{\alpha}{\gamma}} I(x) = V'(x) + \tau(j\omega)^{\beta} V'(x) \quad (4.3)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} I(x) = -(j\omega)^{\gamma} V(x) - V(x) \quad (4.4)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} V(x) = -(j\omega)^{\alpha} I(x) - V'(x). \quad (4.5)$$

Ten zestaw równań można sprowadzić do jednego równania, które spełnia warunek $V(x)$ [80]

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} V(x) - \psi(j\omega) V(x) = 0 \quad (4.6)$$

gdzie

$$\psi(j\omega) = \frac{((j\omega)^{\alpha+\beta} + a(j\omega)^{\alpha} + b)((j\omega)^{\gamma} + 1)}{((j\omega)^{\beta} + a)}. \quad (4.7)$$

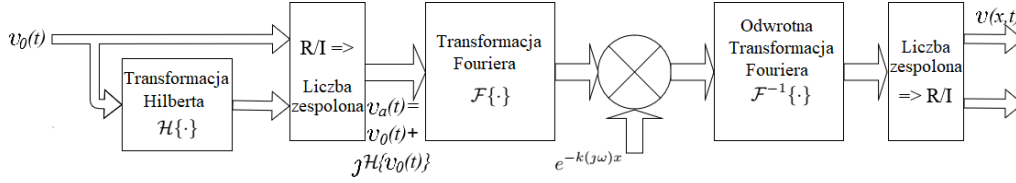
W równaniu (4.7), $a = 1/\tau$ oraz $b = R/(\tau L)(C/G)^{\alpha/\gamma}$. Stąd rozwiązanie równania (4.6) jest dane przez

$$V(x) = V_0(j\omega)e^{-k(j\omega)x} \quad (4.8)$$

gdzie

$$k(j\omega) = \sqrt{\psi(j\omega)}. \quad (4.9)$$

Wybermy stałą propagacji $k(j\omega)$ z dodatnią częścią rzeczywistą. Rozwiązanie w dziedzinie częstotliwości (4.8)–(4.9) pozwala znaleźć rozwiązanie w dziedzinie czasu dla układu (3.87)–(3.91). W tym celu wykonujemy obliczenia zgodnie ze schematem przedstawionym na Rys. 4.1. Sygnał analityczny



rys. 4.1. Schemat symulacji propagacji sygnału wzdłuż linii transmisyjnej RLGC ułamkowego rzędu.

$v_a(t) = v_0(t) + j\mathcal{H}\{v_0(t)\}$ uzyskiwany jest za pomocą transformacji Hilberta [83] z rzeczywistego sygnału $v_0(t)$. Pobudzenie w dziedzinie czasu $v_a(t)$ jest transformowane do dziedziny częstotliwości, następnie jego reprezentacja analityczna jest mnożona przez współczynniki fazowe $e^{-k(j\omega)x}$, a na koniec część rzeczywista odwrotnej transformacji Fouriera jest przyjmowana jako rozwiązanie $v(t)$. Transformację Hilberta można wykonać w dziedzinie częstotliwości zgodnie ze wzorem

$$\mathcal{F}\{\mathcal{H}\{v_0\}\}(j\omega) = -j\text{sgn}(\omega)\mathcal{F}\{v_0\}(j\omega) \quad (4.10)$$

gdzie $\text{sgn}(\omega)$ oznacza funkcję signum argumentu ω . W związku z tym kroki algorytmu związane z transformacją Hilberta (4.10) i mnożeniem przez czynniki fazowe $e^{-k(j\omega)x}$ można połączyć. W opracowanym kodzie zastosowano szybką transformację Fouriera (ang. *fast Fourier transformation* – skrót FFT), aby zmniejszyć koszt obliczeniowy metody [83].

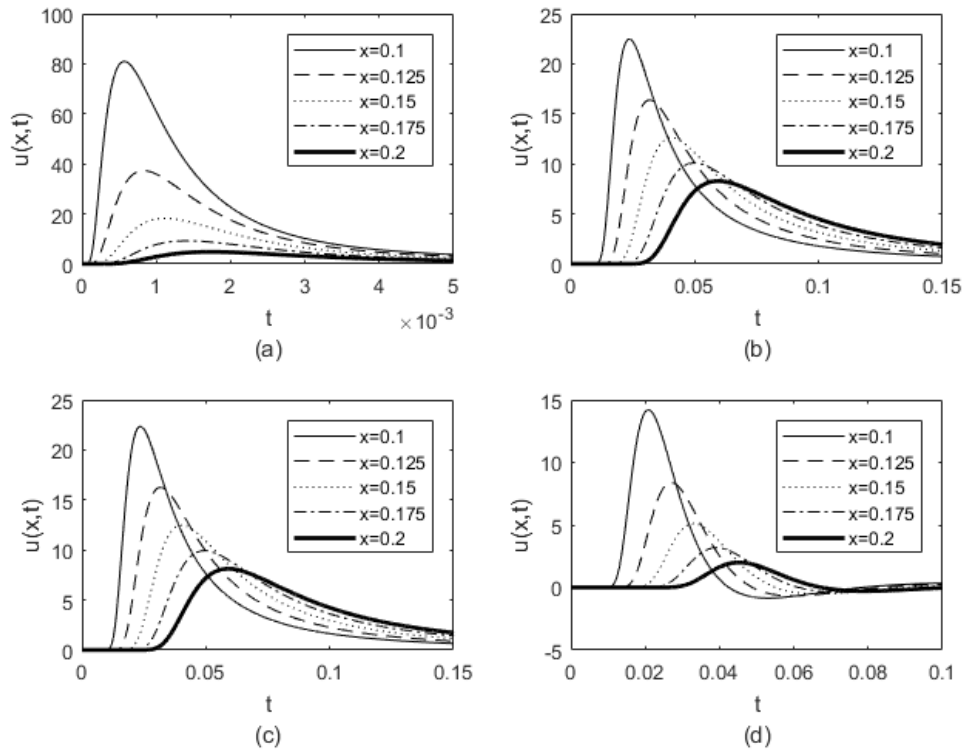
Dzięki zastosowaniu proponowanego algorytmu można uniknąć obliczeń funkcji Greena w dziedzinie czasu lub numerycznego odwracania transformaty Laplace'a. Proponowana metoda symulacji ma jednak ograniczoną stosowalność ze względu na implementację metody w dyskretnej dziedzinie czasu. Współczynniki fazowe $e^{-k(j\omega)x}$ wiążą się z tłumieniem i opóźnieniem fazowym propagowanej fali. Z tego punktu widzenia opóźnienie fazowe musi być większe lub równe przesunięciu fazowemu odpowiadającemu czasowi próbkowania T_s sygnału zespolonego $v_a(t)$. W ten sposób uzyskuje się warunek umożliwiający zastosowanie tej metody.

$$\Im(k(j\omega)x) \geq \omega T_s. \quad (4.11)$$

Dla zespolonego sygnału dyskretnego, maksymalna częstotliwość w widmie dyskretnym jest równa $\frac{1}{T_s}$. Korzystając z równania (4.11), można sprawdzić, czy przyjęte wartości parametrów α , β i γ pozwalają na zastosowanie proponowanej metody symulacji. Zakłada się domyślnie, że wzbudzenia są powtarzane po całkowitym czasie symulacji, który musi być wystarczająco długi, aby umożliwić symulowanym sygnałom zanikanie do zera.

Przedstawione wyniki numeryczne uzyskano przy użyciu standardowych funkcji dostępnych w środowisku programistycznym Matlab. Analizowana jest propagacja sygnału niemonochromatycznego

wzdłuż linii transmisyjnej RLGC ułamkowego rzędu. Dla łatwej weryfikacji metody pobudzenie niech będzie funkcją delta Diraca. W tym przypadku algorytm sprowadza się do obliczeń odwrotnej transformaty Fouriera dla współczynników fazowych $e^{-k(j\omega)x}$. Wyniki dla różnych parametrów modelu linii przedstawiono na Rys. 4.2. Uzyskane wyniki są takie same jak wyniki referencyjne przedstawione w [80, Rys. 7-10], a zatem dowodzą stosowalności proponowanej metody. Ponadto implementacja metody nie wymaga znaczącego wstępnego przetwarzania wzorów analitycznych na płaszczyźnie zespolonej s .



rys. 4.2. Odpowiedź impulsowa modelu linii transmisyjnej RLGC ułamkowego rzędu dla różnych pozycji x . (a) $\alpha = 1/4$, $\beta = \gamma = 2/3$, $a = 2\sqrt[3]{9}$, $b = 450$. (b) $\alpha = 5/6$, $\beta = \gamma = 2/3$, $a = 2\sqrt[3]{9}$, $b = 4.5$. (c) $\alpha = 5/6$, $\beta = \gamma = 2/3$, $a = 2\sqrt[3]{9}$, $b = 9$. (d) $\alpha = 5/6$, $\beta = \gamma = 2/3$, $a = 2\sqrt[3]{9}$, $b = 450$.

4.2. Metody rozwiązywania równań opisujących propagację fal elektromagnetycznych w ośrodkach o ułamkowych relacjach konstytutywnych

4.2.1. Rozwiązania analityczne z czasem ciągłym

W tej sekcji przedstawiamy rozwiązania analityczne równań w przestrzeni stanu (3.26) opisujących pole elektromagnetyczne w czasie ciągłym. Pierwszy punkt pokazuje klasyczny sposób uzyskiwania rozwiązania dla modeli całkowitego rzędu. Następny punkt prezentuje nowe podejście do modeli ułamkowego rzędu.

Media opisane przez modele ułamkowego rzędu

Pochodna Marchaud ułamkowego rzędu zapewnia odpowiedź systemu zależną od nieskończonego przedziału czasu historii. Jest to łatwo widoczne ze względu na jej równoważność z pochodną Grünwalda-Letnikova (2.42), określoną poprzez szereg. Zatem analitycznego rozwiązania równania

$$\mathbf{D}\mathbf{x} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u} \quad (4.12)$$

nie można sformułować jako funkcji zależnej od pojedynczego warunku początkowego $\mathbf{x}_0 = \mathbf{x}(t_0)$. Oznacza to, że dla równania przestrzeni stanu (4.12) sformułowanego na podstawie pochodnej Marchaud istotne jest również to, jak wektor stanu $\mathbf{x}$ został uzyskany w czasie dla rozpatrywanego układu. Zwykle układ fizyczny całkowitego rzędu (np. pole elektromagnetyczne w próżni) magazynuje i rozprasza energię, która *przepływa* zgodnie z ewolucją stanu w dziedzinie czasu wyrażoną przez składową swobodną $e^{\mathbf{A}(t-t_0)}\mathbf{x}_0$ w wyrażeniu

$$\begin{aligned} \mathbf{x} &= \mathbf{x}(t) \\ &= e^{\mathbf{A}(t-t_0)}\mathbf{x}_0 + e^{\mathbf{A}(t-t_0)} \int_{t_0}^t e^{-\mathbf{A}(\tau-t_0)} \mathbf{B}\mathbf{u}(\tau) d\tau. \end{aligned} \quad (4.13)$$

Dla układu ułamkowego rzędu (4.12) sformułowanego na podstawie pochodnej Marchaud (Grünwalda-Letnikova), przejście $\mathbf{x} = \mathbf{x}(t)$ dla $t < t_0$ jest istotne, ponieważ opisuje w jaki sposób energia została dostarczona do układu. Rozsądną alternatywą w analizie tego typu systemów jest założenie, że wektor stanu $\mathbf{x} = \mathbf{x}(t)$ jest równy zeru dla wszystkich czasów $t < t_0$ przed początkowym pobudzeniem układu (4.12) za pomocą wektora $\mathbf{u}$. Dla zwięzłości przyjmujemy, że $t_0 = 0$ w naszych rozważaniach.

Przypadek $\beta = \gamma$

Aby sformułować rozwiązanie analityczne dla tego przypadku, odwołajmy się do twierdzenia 6.1 w [84] i równania (4) w [85] (notatki i sformułowania zostały zaktualizowane w celu zapewnienia spójności z niniejszą pracą doktorską).

Twierdzenie 1 ([84], Twierdzenie 6.1) Rozwiązanie problemu (3.26) sformułowane na podstawie pochodnej Riemanna-Liouville'a z warunkiem początkowym

$$J_a^{1-\beta} x|_{t=0} = \frac{1}{\Gamma(1-\beta)} \int_0^t \frac{x(\tau)}{(t-\tau)^\beta} d\tau = x_0 \quad (4.14)$$

gdzie I^α jest całką Riemanna-Liouville'a rzędu $\alpha \in (0, 1)$, określone jest wzorem

$$x(t) = t^{\beta-1} E_{\beta,\beta}(\mathbf{A}t^\beta) x_0 + \int_0^t (t-\tau)^{\beta-1} E_{\beta,\beta}(\mathbf{A}(t-\tau)^\beta) \mathbf{B}\mathbf{u} d\tau. \quad (4.15)$$

Ponieważ pochodna Riemanna-Liouville'a z zerowym punktem bazowym jest równoważna pochodnej Marchaud dla funkcji przyczynowych, wnioskujemy, że rozwiązanie analityczne równania (3.26), sformułowane na podstawie pochodnej Marchaud dla $\beta = \gamma$, jest dane wzorem (patrz również (4) w [85])

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}(t) = \int_0^t (t-\tau)^{\beta-1} E_{\beta,\beta}(\mathbf{A}(t-\tau)^\beta) \mathbf{B}\mathbf{u} d\tau. \quad (4.16)$$

Przypadek $\beta \neq \gamma$

W tym przypadku rozwiązanie analityczne podane jest w książce [86]. Twierdzenie 2.14 podane w tej książce jest bardzo ogólne i nie jest oczywiste, jak zastosować je bezpośrednio w naszym przypadku. Na początek przytoczmy oryginalną formułę, która odnosi się do układu równań

$$\begin{bmatrix} D^{\alpha_1} x_1 \\ \vdots \\ D^{\alpha_n} x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{11} & \cdots & \mathbf{A}_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{A}_{n1} & \cdots & \mathbf{A}_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{B}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{B}_n \end{bmatrix} u \quad (4.17)$$

gdzie $x_k \in \mathbb{R}^{n_k}$, $\alpha_k \in (p_k - 1, p_k)$, $p_k \in \mathbb{N}$ dla $k \in \{1, \dots, n\}$. Pochodna rozważana w cytowanym twierdzeniu jest pochodną Caputo, ale rozważamy zerowe warunki początkowe, zatem definicje Riemanna-Liouville'a i Caputo pokrywają się. Ponieważ rozważamy tylko funkcje przyczynowe, dwie powyższe definicje pokrywają się również z definicją Marchaud. Ograniczmy zatem nasze rozważania do uproszczonego przypadku z zerowymi warunkami początkowymi i zacytujmy Twierdzenie 2.14 w [86] bez jego pełnej ogólności (co czyni sformułowanie jeszcze dłuższym i zbyt złożonym dla rozważanego przypadku).

Twierdzenie 2 ([86]) Rozwiązanie równania (4.17) z warunkami początkowymi

$$x_k^{(j)}(0) = 0 \in \mathbb{R}^{n_k}, k = 1, \dots, n; j = 0, 1, \dots, p_k - 1 \quad (4.18)$$

określone jest wzorem

$$x(t) = \int_0^t [\Phi_1(t - \tau) \mathbf{B}_{10} + \dots + \Phi_n(t - \tau) \mathbf{B}_{n0}] u(\tau) d\tau \quad (4.19)$$

gdzie

$$x(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^N, N = n_1 + \dots + n_n \quad (4.20)$$

$$\mathbf{B}_{10} = \begin{bmatrix} \mathbf{B}_1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \mathbf{B}_{n0} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \mathbf{B}_n \end{bmatrix} \quad (4.21)$$

$$\begin{aligned} \Phi_1(t) &= \sum_{k_1=0}^{\infty} \cdots \sum_{k_n=0}^{\infty} \mathbf{T}_{k_1 \dots k_n} \frac{t^{(k_1+1)\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \dots + k_n\alpha_n - 1}}{\Gamma((k_1+1)\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \dots + k_n\alpha_n)} \\ &\vdots \\ \Phi_n(t) &= \sum_{k_1=0}^{\infty} \cdots \sum_{k_n=0}^{\infty} \mathbf{T}_{k_1 \dots k_n} \frac{t^{k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \dots + (k_n+1)\alpha_n - 1}}{\Gamma(k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \dots + (k_n+1)\alpha_n)} \end{aligned} \quad (4.22)$$

oraz

$$\mathbf{T}_{k_1 \dots k_n} = \quad (4.23)$$

$$\left\{ \begin{array}{ll}
\mathbf{I}_N & \text{dla } k_1 = \dots = k_n = 0 \\
\begin{bmatrix} \mathbf{A}_{11} & \dots & \mathbf{A}_{1n} \\ 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} & \text{dla } k_1 = 1, k_2 = \dots = k_n = 0 \\
\begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} & \\
\begin{bmatrix} \mathbf{A}_{i1} & \dots & \mathbf{A}_{in} \\ 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} & \text{dla } k_i = 1, k_1 = \dots = k_{i-1} = k_{i+1} = \dots = k_n = 0 \\
\begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} & \\
\begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} & \text{dla } k_n = 1, k_1 = \dots = k_{n-1} = 0 \\
\begin{bmatrix} \mathbf{A}_{n1} & \dots & \mathbf{A}_{nn} \end{bmatrix} & \\
\mathbf{T}_{10\dots 0}\mathbf{T}_{01\dots 1} + \dots + \mathbf{T}_{0\dots 01}\mathbf{T}_{1\dots 10} & \text{dla } k_1 = \dots = k_n = 1 \\
\mathbf{T}_{10\dots 0}\mathbf{T}_{k_1-1, k_2, \dots, k_n} + \dots + \mathbf{T}_{0\dots 01}\mathbf{T}_{k_1, \dots, k_{n-1}, k_n-1} & \text{dla } k_1 + \dots + k_n > 0.
\end{array} \right.$$

Na szczęście przypadek rozważany przez nas jest mniej skomplikowany i można sformułować go w prostszej formie. Odwołajmy się teraz do notacji w [86] i ustawmy $n = 2$, $\alpha_1 = \beta$, $\alpha_2 = \gamma$. Tak samo jak poprzednio, zakładamy zerowe warunki początkowe i wektor $\mathbf{u} = [J_s, 0]^T$. Taka forma $\mathbf{u}$ implikuje, że

$$B_1 = \begin{bmatrix} -\epsilon_\beta^{-1} \mathbf{I}_{N_e} \\ 0 \end{bmatrix} \quad (4.24)$$

i możemy przyjąć $B_2 = 0$. Ponadto istnieje $A_{11} = 0$ o rozmiarze $N_e \times N_e$, $A_{12} = \epsilon_\beta^{-1} [\nabla \times]_D^H$ o rozmiarze $N_e \times N_h$, $A_{21} = -\mu_\gamma^{-1} [\nabla \times]_D^E$ o rozmiarze $N_h \times N_e$ i $A_{22} = 0$ o rozmiarze $N_h \times N_h$. Postępując zgodnie z zapisem Twierdzenia 2.14 w [86], można zauważyć, że

$$\mathbf{T}_{10} = \begin{bmatrix} 0 & A_{12} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (4.25)$$

oraz

$$\mathbf{T}_{01} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ A_{21} & 0 \end{bmatrix}. \quad (4.26)$$

Następnie można zauważyć, że $\mathbf{T}_{n0} = \mathbf{T}_{10}^n = 0$ i $\mathbf{T}_{0n} = \mathbf{T}_{01}^n = 0$ dla $n \geq 2$. Ponadto można również

zauważyć, że

$$\mathbf{T}_{11} = \begin{bmatrix} A_{12}A_{21} & 0 \\ 0 & A_{21}A_{12} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{T}_{21} = \begin{bmatrix} 0 & A_{12}A_{21}A_{12} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

oraz

$$\mathbf{T}_{12} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ A_{21}A_{12}A_{21} & 0 \end{bmatrix}.$$

Oznaczmy dalej macierz

$$\mathbf{C} = A_{12}A_{21} = -\mu_\gamma^{-1}\epsilon_\beta^{-1}[\nabla \times]_D^H [\nabla \times]_D^E \quad (4.27)$$

która jest macierzą kwadratową o rozmiarze $N_e \times N_e$ oraz

$$\mathbf{D} = A_{21}A_{12} = -\mu_\gamma^{-1}\epsilon_\beta^{-1}[\nabla \times]_D^E [\nabla \times]_D^H \quad (4.28)$$

która jest macierzą kwadratową o rozmiarze $N_h \times N_h$. Przez indukcję można łatwo udowodnić, że

$$\mathbf{T}_{nn} = \begin{bmatrix} \mathbf{C}^n & 0 \\ 0 & \mathbf{D}^n \end{bmatrix} \quad (4.29)$$

$$\mathbf{T}_{n+1,n} = \begin{bmatrix} 0 & \mathbf{A}_{12}\mathbf{D}^n \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \mathbf{C}^n\mathbf{A}_{21} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (4.30)$$

oraz

$$\mathbf{T}_{n,n+1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \mathbf{A}_{21}\mathbf{C}^n & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \mathbf{D}^n\mathbf{A}_{21} & 0 \end{bmatrix}. \quad (4.31)$$

Ponadto $\mathbf{T}_{nk} = 0$ jeśli $|n - k| > 1$. Wzór (2.66) w [86], zastosowany do rozpatrywanego przypadku, daje

$$x(t) = \int_0^t \Phi_1(t - \tau) B_{10} u(\tau) d\tau \quad (4.32)$$

gdzie

$$\begin{aligned} \Phi_1(t) &= \sum_{k_1=0}^{+\infty} \sum_{k_2=0}^{+\infty} T_{k_1 k_2} \frac{t^{(k_1+1)\beta + k_2\gamma - 1}}{\Gamma((k_1+1)\beta + k_2\gamma)} = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\mathbf{T}_{nn} \frac{t^{(n+1)\beta + n\gamma - 1}}{\Gamma((n+1)\beta + n\gamma)} + \right. \\ &\quad \mathbf{T}_{n+1,n} \frac{t^{(n+2)\beta + n\gamma - 1}}{\Gamma((n+2)\beta + n\gamma)} + \\ &\quad \left. \mathbf{T}_{n,n+1} \frac{t^{(n+1)\beta + (n+1)\gamma - 1}}{\Gamma((n+1)\beta + (n+1)\gamma)} \right). \end{aligned}$$

Biorąc pod uwagę (4.29)–(4.31), otrzymujemy

$$\sum_{n=0}^{\infty} \mathbf{T}_{nn} \frac{t^{(n+1)\beta + n\gamma - 1}}{\Gamma((n+1)\beta + n\gamma)} = \quad (4.33)$$

$$\begin{bmatrix} \sum_{n=0}^{\infty} \mathbf{C}^n \frac{t^{(n+1)\beta+n\gamma-1}}{\Gamma((n+1)\beta+n\gamma)} & 0 \\ 0 & \sum_{n=0}^{\infty} \mathbf{D}^n \frac{t^{(n+1)\beta+n\gamma-1}}{\Gamma((n+1)\beta+n\gamma)} \end{bmatrix} \\ \sum_{n=0}^{\infty} \mathbf{T}_{n+1,n} \frac{t^{(n+2)\beta+n\gamma-1}}{\Gamma((n+2)\beta+n\gamma)} = \\ \begin{bmatrix} 0 & A_{12} \sum_{n=0}^{\infty} \mathbf{D}^n \frac{t^{(n+2)\beta+n\gamma-1}}{\Gamma((n+2)\beta+n\gamma)} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

oraz

$$\sum_{n=0}^{\infty} \mathbf{T}_{n,n+1} \frac{t^{(n+1)\beta+(n+1)\gamma-1}}{\Gamma((n+1)\beta+(n+1)\gamma)} = \\ \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \mathbf{A}_{21} \sum_{n=0}^{\infty} \mathbf{C}^n \frac{t^{(n+1)\beta+(n+1)\gamma-1}}{\Gamma((n+1)\beta+(n+1)\gamma)} & 0 \end{bmatrix}.$$

Co ostatecznie daje

$$\Phi_1(t) = \begin{bmatrix} t^{\beta-1} E_{\beta+\gamma,\beta}(t^{\beta+\gamma} \mathbf{C}) & t^{2\beta-1} \mathbf{A}_{12} E_{\beta+\gamma,2\beta}(t^{\beta+\gamma} \mathbf{D}) \\ t^{\beta+\gamma-1} \mathbf{A}_{21} E_{\beta+\gamma,\beta+\gamma}(t^{\beta+\gamma} \mathbf{C}) & t^{\beta-1} E_{\beta+\gamma,\beta}(t^{\beta+\gamma} \mathbf{D}) \end{bmatrix} \quad (4.34)$$

oraz

$$x(t) = \int_0^t \Phi_1(t-\tau) \mathbf{B}_\beta \mathbf{u}(\tau) d\tau \quad (4.35)$$

gdzie

$$\mathbf{B}_\beta = \begin{bmatrix} -\epsilon_\beta^{-1} \mathbf{I}_{N_e} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Ze względu na formę macierzy $\mathbf{B}_\beta$ (tj. jej druga kolumna jest równa zeru), rozwiązanie nie zależy w rzeczywistości od drugiej kolumny $\Phi_1(t-\tau)$. Upraszcza to (4.35) w następujący sposób:

$$\mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} \int_0^t (t-\tau)^{\beta-1} E_{\beta+\gamma,\beta}((t-\tau)^{\beta+\gamma} \mathbf{C}) (-\epsilon_\beta^{-1} \mathbf{u}(\tau)) d\tau \\ \int_0^t (t-\tau)^{\beta+\gamma-1} \mathbf{A}_{21} E_{\beta+\gamma,\beta+\gamma}((t-\tau)^{\beta+\gamma} \mathbf{C}) (-\epsilon_\beta^{-1} \mathbf{u}(\tau)) d\tau \end{bmatrix}. \quad (4.36)$$

W symulacjach opisanych w kolejnej sekcji analizujemy problem, który polega na ustaleniu wartości pola elektrycznego w pojedynczym punkcie przestrzennym ($z_0 = 0$), tj. $E(0, t) = h(t)$. Patrząc na wzór (3.7), można równoważnie stwierdzić, że $M_s(0, t) = \frac{1}{\Delta z} h(t)$, a prąd magnetyczny jest używany jako wektor wejściowy $\mathbf{u}(t)$ do układu. Dzięki takiemu podejściu uzyskuje się $\mathbf{B}_1 = 0$ oraz

$$\mathbf{B}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ -\mu_\gamma^{-1} \mathbf{I}_{N_h} \end{bmatrix}. \quad (4.37)$$

Następnie formułę (4.35) można zastąpić

$$x(t) = \int_0^t \Phi_2(t-\tau) \mathbf{B}_\gamma \mathbf{u}(\tau) d\tau \quad (4.38)$$

gdzie

$$\mathbf{B}_\gamma = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -\mu_\gamma^{-1} \mathbf{I}_{N_h} \end{bmatrix} \quad (4.39)$$

oraz

$$\Phi_2(t) = \begin{bmatrix} t^{\gamma-1} E_{\beta+\gamma,\gamma}(t^{\beta+\gamma} \mathbf{C}) & t^{\beta+\gamma-1} \mathbf{A}_{12} E_{\beta+\gamma,\beta+\gamma}(t^{\beta+\gamma} \mathbf{D}) \\ t^{2\gamma-1} \mathbf{A}_{21} E_{\beta+\gamma,2\gamma}(t^{\beta+\gamma} \mathbf{C}) & t^{\gamma-1} E_{\beta+\gamma,\gamma}(t^{\beta+\gamma} \mathbf{D}) \end{bmatrix}. \quad (4.40)$$

Można zatem zapisać rozwiązanie w postaci podobnej do (4.36), ale zależnej od $\mathbf{D}$, a nie $\mathbf{C}$

$$\mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} \int_0^t (t-\tau)^{\beta+\gamma-1} \mathbf{A}_{12} E_{\beta+\gamma,\beta+\gamma}((t-\tau)^{\beta+\gamma} \mathbf{D})(-\mu_\gamma^{-1} \mathbf{u}(\tau)) d\tau \\ \int_0^t (t-\tau)^{\gamma-1} E_{\beta+\gamma,\gamma}((t-\tau)^{\beta+\gamma} \mathbf{D})(-\mu_\gamma^{-1} \mathbf{u}(\tau)) d\tau \end{bmatrix}. \quad (4.41)$$

Chociaż dla $\beta = \gamma$, (4.35) nie wygląda podobnie do (4.16), można sprawdzić, że te dwa wzory są w rzeczywistości takie same. Parzyste wyrazy w rozwinięciu w szereg funkcji Mittaga–Lefflera macierzy $\mathbf{A}$ reprezentują wyrazy $\mathbf{T}_{nn}$ w (4.33). Z drugiej strony, nieparzyste wyrazy w rozwinięciu w szereg funkcji Mittaga–Lefflera macierzy $\mathbf{A}$ odpowiadają sumie $\mathbf{T}_{n+1,n}$ i $\mathbf{T}_{n,n+1}$ w (4.33).

Można zauważyć też, że składowa pola elektrycznego w wektorze $\mathbf{x}(t)$, dana wzorem (4.41), nie zależy od β i γ indywidualnie, lecz od ich sumy $\beta + \gamma$. Jest to wynik oczekiwany, ponieważ stanowi rozwiązanie problemu sygnalizacji (ang. *signalling problem*) dla równania fal dyfuzyjnych rzędu $\beta + \gamma$ względem czasu. Z drugiej strony, składowa pola magnetycznego zależy od $\beta + \gamma$ i wyłącznie od β , co jest uzasadnione, biorąc pod uwagę jedno z równań Maxwella (3.24).

4.2.2. Rozwiązania analityczne z czasem dyskretnym

Aby uzyskać rozwiązania z czasem dyskretnym, wystarczy aproksymować rozwiązania analityczne z czasem ciągłym. Pierwsza podsekcja pokazuje klasyczny sposób podążania tą ideą dla modeli całkowitego rzędu. Następne podsekcje przedstawiają nowe podejście do modeli ułamkowego rzędu.

Media opisane przez modele całkowitego rzędu

Aby wykonać symulację systemu

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u} \quad (4.42)$$

naależy wyprowadzić jego model dyskretny. W tym celu formułujemy równoważny model oparty o ekstrapolator rzędu zerowego (ang. *zero-order hold* – skrót ZOH) [64] dla układu, którego rozwiązanie podane jest przez (4.13). Następnie, przyjmując czas próbkowania T i stosując standardową procedurę całkowania w zakresie $(kT, kT + T)$ [64], otrzymujemy

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_{k+1} &= \mathbf{x}(kT + T) \\ &= e^{\mathbf{A}T} \mathbf{x}(kT) + \int_{kT}^{kT+T} e^{\mathbf{A}(kT+T-\tau)} \mathbf{B} d\tau \mathbf{u}(kT) \\ &= \Phi \mathbf{x}_k + \Gamma \mathbf{u}_k \end{aligned} \quad (4.43)$$

gdzie

$$\Phi = e^{\mathbf{A}T} \quad (4.44)$$

$$\Gamma = \int_{kT}^{KT+T} e^{\mathbf{A}(kT+T-\tau)} \mathbf{B} d\tau = \int_0^T e^{\mathbf{A}\xi} \mathbf{B} d\xi. \quad (4.45)$$

Zwykle pobudzenie w elektromagnetyzmie ma rozkład przestrzenny, który nie zmienia się w czasie, tj. $\mathbf{J}_s = T(t)\mathbf{R}(\mathbf{r})$. Wtedy $\mathbf{B}$ jest wektorem kolumnowym (tj. $\mathbf{B} = \mathbf{b}$), a $\mathbf{u}_k$ jest funkcją skalarną (tj. $\mathbf{u}_k = u_k$), stąd można zapisać (4.43) w następujący sposób:

$$\mathbf{x}_{k+1} = \Phi \mathbf{x}_k + \Gamma u_k \quad (4.46)$$

gdzie

$$\Gamma = \int_0^T e^{\mathbf{A}\xi} \mathbf{b} d\xi. \quad (4.47)$$

W rozpatrywanym przypadku można zdefiniować macierz

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{b} \\ \mathbf{0} & 0 \end{bmatrix} \quad (4.48)$$

co pozwala obliczyć macierze Φ i Γ , ponieważ [64]

$$e^{\mathbf{M}T} = \begin{bmatrix} \Phi & \Gamma \\ \mathbf{0} & 1 \end{bmatrix}. \quad (4.49)$$

Na koniec można sformułować ogólne rozwiązanie (4.43) dla $k > k_0$

$$\mathbf{x}_k = \Phi^{k-k_0} \mathbf{x}_{k_0} + \sum_{m=k_0}^{k-1} \Phi^{k-m-1} \Gamma \mathbf{u}_m \quad (4.50)$$

gdzie $\mathbf{x}_{k_0}$ odpowiada warunkowi początkowemu $\mathbf{x}_0 = \mathbf{x}(t_0)$ gdy $t_0 = k_0 T$.

Media opisane przez modele ułamkowego rzędu

Przypadek $\beta = \gamma$

W tym przypadku rozwiązanie analityczne jest dane przez (4.16) jako

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}(t) = \int_0^t (t - \tau)^{\beta-1} E_{\beta,\beta}(\mathbf{A}(t - \tau)^\beta) \mathbf{B} \mathbf{u}(\tau) d\tau. \quad (4.51)$$

Dyskretnoczasowe przybliżenie rozwiązania $\mathbf{x}$ znajdziemy jako ciąg $\mathbf{x}_k = \mathbf{x}(kT)$, dla ustalonego kroku czasowego $T > 0$ i $k = 0, 1, 2, \dots$. Założymy, że funkcja $\mathbf{u}(t)$ jest stała w przedziałach $(kT, kT + T)$ i oznaczmy $\mathbf{u}_k = \mathbf{u}(kT)$. Zatem $\mathbf{x}_0 = 0$ oraz

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_k &= \int_0^{kT} (kT - \tau)^{\beta-1} E_{\beta,\beta}(\mathbf{A}(kT - \tau)^\beta) \mathbf{B} \mathbf{u}(\tau) d\tau = \\ &= \sum_{l=1}^k \int_{(l-1)T}^{lT} (kT - \tau)^{\beta-1} E_{\beta,\beta}(\mathbf{A}(kT - \tau)^\beta) d\tau \cdot \mathbf{B} \mathbf{u}_{l-1} \end{aligned} \quad (4.52)$$

dla $k = 1, 2, \dots$

Przyjrzyjmy się teraz całce w formule powyżej i przekształćmy ją poprzez prostą zamianę zmiennych $kT - \tau = \xi$. Daje to

$$\int_{(l-1)T}^{lT} (kT - \tau)^{\beta-1} E_{\beta,\beta}(\mathbf{A}(kT - \tau)^\beta) d\tau = \int_{(k-l)T}^{(k-l+1)T} \xi^{\beta-1} E_{\beta,\beta}(\mathbf{A}\xi^\beta) d\xi. \quad (4.53)$$

Dlatego, gdy oznaczmy

$$\mathbf{C}_n = \int_{nT}^{(n+1)T} \xi^{\beta-1} E_{\beta,\beta}(\mathbf{A}\xi^\beta) d\xi \quad (4.54)$$

można dyskretnoczasowe rozwiązanie $\mathbf{x}_k$ zapisać jako

$$\mathbf{x}_k = \sum_{l=1}^k \mathbf{C}_{k-l} \cdot \mathbf{B}\mathbf{u}_{l-1} \quad (4.55)$$

czyli jako spłot dyskretnych sygnałów $\mathbf{B}\mathbf{u}_n$ i $\mathbf{C}_n$.

Spójrzmy teraz na macierze $\mathbf{C}_n$, aby znaleźć sposób na ich obliczenie. Weźmy

$$\xi^{\beta-1} E_{\beta,\beta}(\mathbf{A}\xi^\beta) = \xi^{\beta-1} \sum_{l=0}^{+\infty} \frac{\mathbf{A}^l \xi^{l\beta}}{\Gamma(\beta l + \beta)} = \sum_{l=0}^{+\infty} \frac{\mathbf{A}^l \xi^{l\beta + \beta - 1}}{\Gamma(\beta l + \beta)}. \quad (4.56)$$

Całkowanie szeregu wyraz po wyrazie daje

$$\begin{aligned} \mathbf{C}_n &= \sum_{l=0}^{+\infty} \frac{\mathbf{A}^l}{\Gamma(\beta l + \beta)} \int_{nT}^{(n+1)T} \xi^{l\beta + \beta - 1} d\xi = \\ &= \sum_{l=0}^{+\infty} \frac{\mathbf{A}^l}{\Gamma(\beta l + \beta)(l\beta + \beta)} \left(((n+1)T)^{l\beta + \beta} - (nT)^{l\beta + \beta} \right) = \\ &= ((n+1)T)^\beta \sum_{l=0}^{+\infty} \frac{(\mathbf{A}(n+1)^\beta T^\beta)^l}{\Gamma(\beta l + \beta + 1)} - (nT)^\beta \sum_{l=0}^{+\infty} \frac{(\mathbf{A}n^\beta T^\beta)^l}{\Gamma(\beta l + \beta + 1)} = \\ &= ((n+1)T)^\beta E_{\beta,\beta+1}(\mathbf{A}(n+1)^\beta T^\beta) - (nT)^\beta E_{\beta,\beta+1}(\mathbf{A}n^\beta T^\beta). \end{aligned} \quad (4.57)$$

Wartości $\mathbf{C}_n$ można łatwo znaleźć, jeśli dostępna jest procedura obliczania macierzowej funkcji Mittag-Lefflera

$$E_{\alpha,\beta}(A) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{\Gamma(\alpha k + \beta)}. \quad (4.58)$$

Procedura ta zaimplementowana jest w środowisku Matlab, a wyniki symulacji przedstawiono w sekcji poniżej.

Przypadek $\beta \neq \gamma$

Odwołujemy się do rozwiązania analitycznego $\mathbf{x}(t)$ danego przez (4.35) i znajdujemy jego dyskretne przybliżenie jako ciąg $\mathbf{x}_k = \mathbf{x}(kT)$, dla ustalonego kroku czasowego $T > 0$ i $k = 0, 1, 2, \dots$. Zaczynamy tak jak w przypadku $\beta = \gamma$, tj. zakładamy, że funkcja $\mathbf{u}(t)$ jest stała na przedziałach $(kT, kT + T)$ i oznaczamy $\mathbf{u}_k = \mathbf{u}(kT)$. Gdy tę dyskretyzację zastosujemy do (4.36), otrzymujemy

$$\mathbf{x}_k = \sum_{l=1}^k -\varepsilon_\beta^{-1} \left[\int_{(l-1)T}^{lT} (kT - \tau)^{\beta-1} E_{\beta+\gamma,\beta}((kT - \tau)^{\beta+\gamma} \mathbf{C}) \mathbf{u}_{l-1} d\tau - \int_{(l-1)T}^{lT} (kT - \tau)^{\beta+\gamma-1} \mathbf{A}_{21} E_{\beta+\gamma,\beta+\gamma}((kT - \tau)^{\beta+\gamma} \mathbf{C}) \mathbf{u}_{l-1} d\tau \right]. \quad (4.59)$$

Podobnie jak powyżej, można zastosować zamianę zmiennych $kT - \tau = \xi$ w celu uzyskania

$$\mathbf{x}_k = \sum_{l=1}^k -\varepsilon_{\beta}^{-1} \left[\int_{(k-l)T}^{(k-l+1)T} \xi^{\beta-1} E_{\beta+\gamma,\beta}(\xi^{\beta+\gamma} \mathbf{C}) d\tau \cdot \mathbf{u}_{l-1} \right. \\ \left. \int_{(k-l)T}^{(k-l+1)T} \xi^{\beta+\gamma-1} \mathbf{A}_{21} E_{\beta+\gamma,\beta+\gamma}(\xi^{\beta+\gamma} \mathbf{C}) d\tau \cdot \mathbf{u}_{l-1} \right]. \quad (4.60)$$

Niech

$$\mathbf{C}_n = \int_{nT}^{(n+1)T} \xi^{\beta-1} E_{\beta+\gamma,\beta}(\xi^{\beta+\gamma} \mathbf{C}) d\tau \quad (4.61)$$

$$\mathbf{D}_n = \int_{nT}^{(n+1)T} \xi^{\beta+\gamma-1} \mathbf{A}_{21} E_{\beta+\gamma,\beta+\gamma}(\xi^{\beta+\gamma} \mathbf{C}) d\tau. \quad (4.62)$$

Całkując szereg wyraz po wyrazie, można wyprowadzić wzory

$$\mathbf{C}_n = ((n+1)T)^{\beta} E_{\beta+\gamma,\beta+1} \left(((n+1)T)^{\beta+\gamma} \mathbf{C} \right) - (nT)^{\beta} E_{\beta+\gamma,\beta+1} \left((nT)^{\beta+\gamma} \mathbf{C} \right) \quad (4.63)$$

oraz

$$\mathbf{D}_n = ((n+1)T)^{\beta+\gamma} \mathbf{A}_{21} E_{\beta+\gamma,\beta+\gamma+1} \left(((n+1)T)^{\beta+\gamma} \mathbf{C} \right) - \\ (nT)^{\beta+\gamma} \mathbf{A}_{21} E_{\beta+\gamma,\beta+\gamma+1} \left((nT)^{\beta+\gamma} \mathbf{C} \right). \quad (4.64)$$

Następnie rozwiązanie można obliczyć za pomocą wzoru podobnego do splotu

$$\mathbf{x}_k = \sum_{l=1}^k -\varepsilon_{\beta}^{-1} \begin{bmatrix} \mathbf{C}_{k-l} \cdot \mathbf{u}_{l-1} \\ \mathbf{D}_{k-l} \cdot \mathbf{u}_{l-1} \end{bmatrix}. \quad (4.65)$$

Rozwiązując problem sygnałowy, należy dyskretyzować wzór (4.41) zamiast (4.36). W związku z tym macierze $\mathbf{C}_n$ i $\mathbf{D}_n$ uzyskują nieco inny kształt:

$$\mathbf{C}_n = ((n+1)T)^{\beta+\gamma} \mathbf{A}_{12} E_{\beta+\gamma,\beta+\gamma+1} \left(((n+1)T)^{\beta+\gamma} \mathbf{D} \right) - \\ (nT)^{\beta+\gamma} \mathbf{A}_{21} E_{\beta+\gamma,\beta+\gamma+1} \left((nT)^{\beta+\gamma} \mathbf{D} \right) \quad (4.66)$$

oraz

$$\mathbf{D}_n = ((n+1)T)^{\gamma} E_{\beta+\gamma,\gamma+1} \left(((n+1)T)^{\beta+\gamma} \mathbf{D} \right) - (nT)^{\gamma} E_{\beta+\gamma,\gamma+1} \left((nT)^{\beta+\gamma} \mathbf{D} \right). \quad (4.67)$$

Można zauważyć, że używając wzoru (4.65) do obliczenia wyłącznie składowej pola elektrycznego, można ograniczyć rozważania do pierwszej składowej, tj.

$$\mathbf{E}_k = \sum_{l=1}^k -\varepsilon_{\beta}^{-1} \mathbf{C}_{k-l} \cdot \mathbf{u}_{l-1} \quad (4.68)$$

gdzie

$$\mathbf{x}_k = \begin{bmatrix} \mathbf{E}_k \\ \mathbf{H}_k \end{bmatrix}.$$

Wyniki symulacji

Rozważmy jednokierunkową propagację niemonochromatycznej fali płaskiej (składowe E_x i H_y) w kierunku $+z$, jak w [87]. Poprawność metod obliczeniowych można łatwo sprawdzić poprzez bezpośrednie porównanie z istniejącymi wynikami symulacji. Rozważmy scenariusz symulacji, który zakłada padanie fali płaskiej na półprzestrzeń będącą ośrodkiem opisanym przez pochodną ułamkowego rzędu. Fala wnika do ośrodka i propaguje się. Ostatecznie jej przebieg w dziedzinie czasu w pewnej odległości L jest uzyskiwany za pomocą proponowanej metody, a także metody referencyjnej [87] (która jest zweryfikowana w [71]). Wzbudzenie sygnału pochodzi z pola elektrycznego na granicy obszaru, na którym wykonywana jest symulacja. W pierwszych symulacjach przyjęto, że rząd pochodnych $\beta = \gamma = \nu$ jest nieznacznie poniżej jedności, tj. uwzględniane są jedynie niewielkie zaburzenia rzędów pochodnych czasowych w równaniach Maxwella. Przy niewielkiej odległości od pobudzenia, propagowany sygnał uzyskuje przebiegi impulsowe, chociaż jego amplituda jest silnie stłumiona. Rozważmy pobudzenie, którym jest sinusoidalny impuls modulowany krzywą Gaussa, patrz [87]. Jego częstotliwość środkowa jest ustawiona na $f_c = 590$ THz (długość fali $\lambda_c = 508$ nm w próżni), a widmo obejmuje pasmo widzialne, tj. 430–750 THz (399–697 nm). Pozostałe parametry symulacji przyjęto jak w pracy [87]. Symulacje przeprowadzono z wykorzystaniem modelu opartego o ZOH, opisanego w sekcji 4.2.2. Rozmiar kroku czasowego używany w metodzie ZOH wynosi $T = \frac{1}{50 f_{max}} \approx 2,66 \times 10^{-17}$ s, gdzie $f_{max} = 750$ THz. Następnie rozmiar kroku przestrzennego przyjmuje się jako $\Delta z = cT \approx 7,97 \cdot 10^{-9}$ m.

Aby zastosować powyższą metodę, należy numerycznie obliczyć funkcję macierzową Mittag-Lefflera zadaną wzorem (4.58). Ogólnie rzecz biorąc, ten problem obliczeniowy jest dość złożony (szczegóły można znaleźć w opisie algorytmu autorstwa Garappy i Popolizio [88] lub Matychyna i Onyshchenko [85]). Ten ostatni jest zaimplementowany i opublikowany jako kod w języku Matlab [89] (który z kolei wykorzystuje procedurę dla skalarnej funkcji Mittag-Lefflera opublikowaną również jako kod w języku Matlab przez Garappę [90], patrz również [91] w celu zapoznania się z opisem algorytmu). Niestety, procedura opublikowana przez Matychyna rozpoczyna się od numerycznego rozkładu Jordana macierzy, co generalnie tworzy problemy z macierzami o dużych rozmiarach, dlatego nie mogliśmy jej użyć bezpośrednio. Jednakże, jeśli można przedstawić macierz $\mathbf{A}$ w postaci

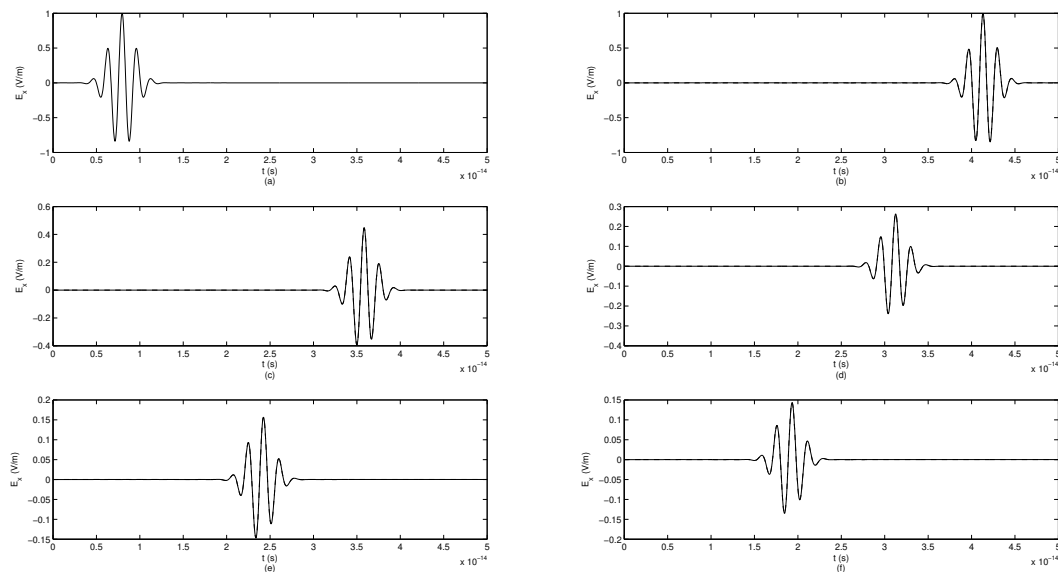
$$\mathbf{A} = \mathbf{T} \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \mathbf{T}^{-1} \quad (4.69)$$

wtedy łatwo sprawdzić, że

$$E_{\alpha, \beta}(t^\beta \mathbf{A}) = \mathbf{T} \text{diag}(E_{\alpha, \beta}(t^\beta \lambda_1), \dots, E_{\alpha, \beta}(t^\beta \lambda_n)) \mathbf{T}^{-1} \quad (4.70)$$

gdzie $E_{\alpha, \beta}(t^\beta \lambda_i)$ ($i = 1, \dots, n$) jest regularną funkcją skalarną. Nie posiadamy wiedzy na temat istnienia jakiegokolwiek wyniku analitycznego dotyczącego wartości i wektorów własnych macierzy $\mathbf{A}$ w ogólnym przypadku. Jednak w przypadku jednowymiarowym, macierz $\mathbf{A}$ można przedstawić w postaci blokowo-macierzowej

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{Q} \\ \mathbf{P} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad (4.71)$$



rys. 4.3. Propagacja fali sinusoidalnej modulowanej funkcją Gaussa w ośrodku opisanym modelem ułamkowego rzędu. Sygnał mierzony w odległości $L = 10 \mu\text{m}$. (a) Sygnał pobudzenia. (b) $\nu = 1$ (próżnia). (c) $\nu = 0,995$. (d) $\nu = 0,99$. (e) $\nu = 0,98$. (f) $\nu = 0,97$. Wyniki przedstawiono dla opracowanej metody stosującej ZOH (—) i metody referencyjnej (- -), tj. obie linie nakładają się.

gdzie $\mathbf{P}$ i $\mathbf{Q}$ są macierzami dwuprzekątnymi danymi odpowiednio przez (1) i (2). Korzystając z tej reprezentacji, można obliczyć macierz Mittag-Lefflera funkcji $E_{\alpha,\beta}(t^\beta \mathbf{A})$, dla punktu czasowego $t > 0$, w odniesieniu do funkcji Mittag-Lefflera pewnych trójprzekątnych macierzy blokowych, z wartościami własnymi i wektorami własnymi określonymi znanymi wzorami analitycznymi (patrz [92]). Korzystając z proponowanego rozkładu blokowego, przypadek $\beta = \gamma$ jest w rzeczywistości reprezentowany w taki sam sposób, jak przypadek ogólny $\beta \neq \gamma$, z blokami $\mathbf{A}_{12}$ i $\mathbf{A}_{21}$ (w (4.25) i (4.26)) odpowiadającymi macierzom $\mathbf{P}$ i $\mathbf{Q}$. Szczegóły całego rozumowania (w tym niektóre optymalizacje i proces przygotowania wektora wejściowego) podano w Dodatku A.

Porównajmy przebiegi zmierzone w odległości $L = 10 \mu\text{m}$ od źródła dla zmiennej wartości parametru ν , patrz Rys. 4.3. Na Rys. 4.3(a) przedstawiono sygnał pobudzenia, natomiast na Rys. 4.3(b) wyniki przedstawiono dla przypadku całkowitego rzędu (tj. próżni z $\nu = 1$). Jak można zauważyć, uzyskane wyniki i wyniki referencyjne pokrywają się, co dowodzi dokładności i stosowalności dyskretnego modelu ZOH do symulacji w próżni. Na Rys. 4.3(c)–(f) zastosowano mniejsze ν , co pozwala zaobserwować impuls wcześniej w punkcie obserwacji (tj. jego maksimum i front fali) niż dla $\nu = 1$. Jak widać, wyniki uzyskane z zastosowaniem proponowanej i referencyjnej metody pokrywają się, co ponownie dowodzi stosowalności dyskretnego modelu ZOH do symulacji propagacji fali w ośrodkach opisanych przez modele ułamkowego rzędu. Proponowany powyżej schemat jest jednak bardziej elastyczny niż przedstawiona w [87] metoda działająca w dziedzinie częstotliwości, ponieważ pozwala na zmiany parametrów materiałowych w dziedzinie obliczeniowej, podobnie jak typowy schemat różnic skończonych. Co więcej, proponowany schemat można rozszerzyć o symulacje i analizy wielowymiarowe

Tabela 4.1: Maksymalny błąd względny pomiędzy metodą opartą na modelu ZOH i metodą referencyjną.

ν	1	0.995	0.99	0.98	0.97
Błąd (dB)	−34.1	−41	−43.4	−38	−33.5

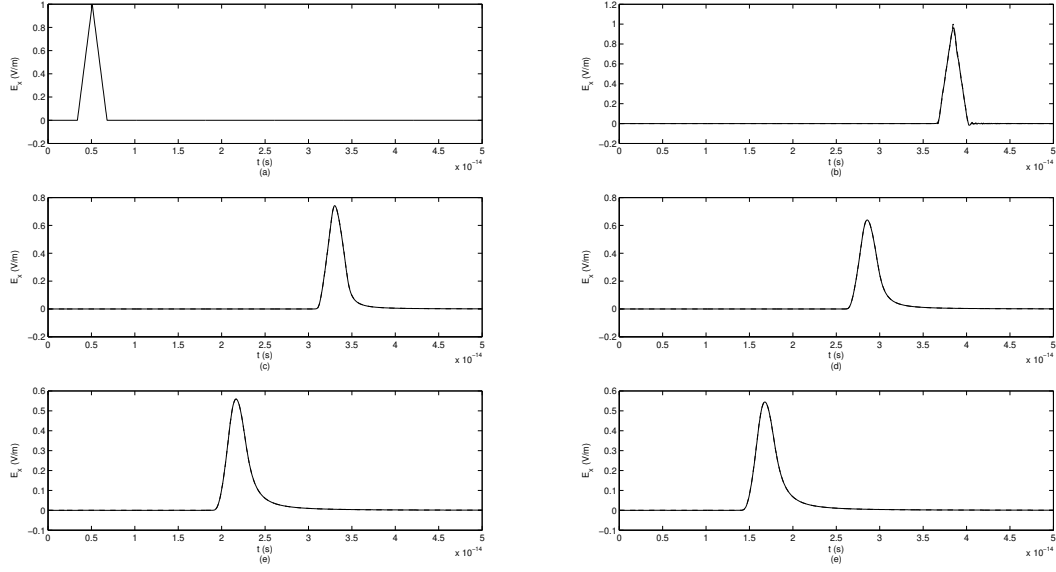
(tj. schemat działa nie tylko w jednym wymiarze) dzięki zastosowaniu schematu różnic skończonych oraz implementacji pochodnej Grünwalda-Letnikova w dziedzinie czasu. To rozszerzenie, choć teoretycznie proste w zastosowaniu, napotyka na istotne ograniczenie praktyczne, tzn. wymaga wydajnego sposobu obliczania macierzy Mittaga-Lefflera.

Maksymalne błędy między symulacjami opartymi na modelu ZOH a wynikami referencyjnymi przedstawiono w Tab. 4.1. Zastosowana definicja błędu oblicza maksymalną wartość modułu różnicy między metodą ZOH $f(n)$ a metodą referencyjną $f_{ref}(n)$, podzieloną (tj. znormalizowaną) przez maksymalną wartość modułu sygnału referencyjnego

$$\text{Błąd (dB)} = 20 \log_{10} \left(\frac{\max |f(n) - f_{ref}(n)|}{\max |f_{ref}(n)|} \right). \quad (4.72)$$

Średni błąd jest równy $-37,2$ dB, co wydaje się być poprawną dokładnością, biorąc pod uwagę fakt, że w obliczeniach rozwiązań numerycznych należy obliczyć macierzową funkcję Mittaga-Lefflera dla macierzy o dużym rozmiarze (w rozważanym przykładzie rozmiar macierzy kwadratowej $\mathbf{PQ}$ jest równy 6250, co oznacza, że 6250 wartości skalarnej funkcji Mittaga-Lefflera jest obliczanych w każdym kroku czasowym). Błąd metody numerycznej obliczającej funkcję Mittaga-Lefflera jest równy $|E - E_A|/(1 + |E|) \approx 10^{-15}$, gdzie E oznacza dokładną wartość funkcji Mittaga-Lefflera, podczas gdy E_A oznacza jej przybliżenie (por. [90]). Obliczone wartości funkcji Mittaga-Lefflera są bliskie jedności co oznacza, że błąd pojedynczego obliczenia funkcji Mittaga-Lefflera wynosi około 10^{-15} . Dla funkcji o wartościach macierzowych używanych w symulacjach, obliczenia są powtarzane dla wszystkich 6250 elementów na diagonalu, co powoduje, że estymata błędu jest równa 10^{-12} . Dodatkowo macierz diagonalna funkcji Mittaga-Lefflera jest mnożona przez dwie macierze o większym rozmiarze. To powoduje, że estymata błędu numerycznego metody jest nie lepsza niż 10^{-6} . Jest to jednak oszacowanie błędu wynikające jedynie z zastosowanych obliczeń macierzowych, tj. bez udziału błędu metody rozwiązania równania różniczkowego.

Drugi zestaw symulacji przeprowadzono dla układu z różnymi β i γ . W symulacjach zakładamy $\gamma = 1$ i zmieniamy wartości β , co daje efektywny rząd równania dyfuzyjno-falowego ułamkowego rzędu $\beta + \gamma$ równy 1,94, 1,96, 1,98, 1,99 i 2 – jak w poprzednim zestawie symulacji. Pobudzeniem (tj. warunkiem brzegowym w problemie sygnałowym) jest impuls trójkątny o amplitudzie jednostkowej, rozpoczynający się w $t_1 = 3,4 \cdot 10^{-15}$ s i kończący się w $t_2 = 6,8 \cdot 10^{-15}$ s. Symulacje przeprowadzono z wykorzystaniem modelu równoważnego ZOH, opisanego powyżej. Porównujemy przebiegi zmierzone w odległości $L = 10 \mu\text{m}$ od źródła dla zmiennej wartości parametru β (patrz Rys. 4.4). Podobnie jak poprzednio, maksymalne błędy pomiędzy symulacjami opartymi na modelu ZOH a wynikami referencyjnymi przedstawiono w Tab. 4.2. Podobnie jak poprzednio, możemy obliczyć średni błąd, który

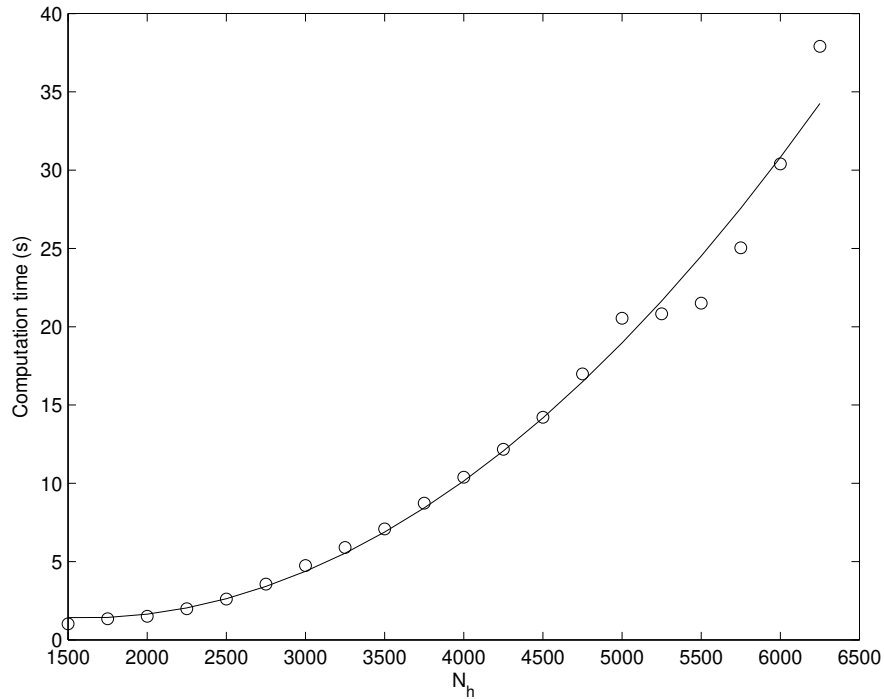


rys. 4.4. Propagacja impulsu trójkątnego w ośrodku opisanym modelem ułamkowego rzędu, gdzie $\gamma = 1$. Sygnał mierzony w odległości $L = 10 \mu m$. (a) Sygnał pobudzenia. (b) $\beta = 1$ (próżnia). (c) $\beta = 0.99$. (d) $\beta = 0.98$. (e) $\beta = 0.96$. (f) $\beta = 0.94$. Wyniki przedstawiono dla opracowanej metody ZOH (—) i metody referencyjnej (---), tj. obie linie nakładają się.

Tabela 4.2: Maksymalny błąd względny pomiędzy metodą opartą na modelu ZOH i metodą referencyjną dla propagacji impulsu trójkątnego.

β	1	0.99	0.98	0.96	0.94
Błąd (dB)	-27.5	-48	-54.4	-57.1	-49.1

wynosi -39,5 dB. Jego wartość jest zbliżona do wartości uzyskanej w pierwszej serii symulacji. Jeśli chodzi o czas obliczeń i złożoność obliczeniową, najbardziej czasochłonnym elementem jest obliczenie macierzy C_n we wzorze (4.68). Każda macierz C_n jest różnicą między dwiema macierzowymi funkcjami Mittag-Lefflera w kolejnych punktach czasowych. Jednak ze względu na rekurencyjny charakter wzoru (4.66), wystarczy obliczyć jedną macierzową funkcję Mittag-Lefflera na jeden krok czasowy. Pozostałe operacje (mnożenie przez skalary, budowanie macierzy stałych i operacje splotu) są stosunkowo szybkie i proste w porównaniu z obliczeniami macierzy C_n . Obliczenia funkcji macierzowej Mittag-Lefflera składają się z dwóch ważnych komponentów: obliczeń funkcji macierzowej Mittag-Lefflera dla macierzy diagonalnej (które są stosunkowo czasochłonne, ale charakteryzują się liniową złożonością obliczeniową) oraz mnożenia macierzy gęstych. Ten ostatni komponent odpowiada za kwadratowy wzrost czasu obliczeń wraz ze wzrostem rozmiaru przestrzennego problemu. Na przykład obliczenia funkcji macierzowej Mittag-Lefflera dla argumentu macierzowego $t^{\beta+\gamma}\mathbf{D}$ o rozmiarze $N_h \times N_h$, gdy znamy reprezentację macierzy w postaci (4.69), wymagają obliczeń N_h wartości skalarnej funkcji Mittag-Lefflera i pomnożenia przez dwie gęste macierze o rozmiarze $N_h \times N_h$. Aby zilustrować, jak czas obliczeń rośnie wraz z rozmiarem N_h macierzy kwadratowej $t^{\beta+\gamma}\mathbf{D}$ w symulacjach, przedstawiamy



rys. 4.5. Czas obliczeń dla generowania macierzy Mittag-Lefflera w zależności od rozmiaru obszaru przestrzennego N_h . Kółka odpowiadają czasom zmierzonym na PC, linia ciągła to najlepiej dopasowany wielomian drugiego stopnia odpowiadający zmierzonym punktom.

czasy obliczeń niezbędne do obliczenia funkcji macierzowej Mittag-Lefflera na typowym komputerze osobistym (PC) (z procesorem Intel(R) Core(TM) i5-8250U 1,60 GHz), patrz Rys. 4.5. Całkowity czas symulacji jest w przybliżeniu równy czasowi potrzebnemu na wygenerowanie tej macierzy, pomnożonemu przez liczbę kroków czasowych. Inne obliczenia mają pomijalny wpływ na całkowity czas symulacji.

Podsumowując, równania Maxwella w elektromagnetyzmie ułamkowego rzędu można zatem traktować analogicznie do układu równań w przestrzeni stanów z czasem ciągłym w inżynierii sterowania. Pozwala to na wykorzystanie szerokiego zestawu metod wykorzystywanych w inżynierii sterowania do symulacji i analizy. Możliwe jest zatem wyprowadzenie rozwiązań analitycznych z czasem ciągłym w oparciu o macierze przejść stanów dla propagacji fal elektromagnetycznych w ośrodkach opisanych pochodnymi czasowymi ułamkowego rzędu oraz wyprowadzenie równoważnych modeli ZOH z czasem dyskretnym i otrzymanie dla nich rozwiązań analitycznych. Przedstawione modele i rozwiązania mogą być przydatne w innych dziedzinach nauki, które rozwiązują równania dyfuzyjno-falowe ułamkowego rzędu.

4.2.3. Metoda różnic skończonych w dziedzinie czasu (FDTD)

Szeroko wykorzystywaną metodą do rozwiązywania równań opisujących pole elektromagnetyczne jest metoda FDTD [62]. Ten algorytm obliczeniowy dyskretyzuje przestrzeń i czas w siatkę, a następnie oblicza pola elektromagnetyczne (elektryczne i magnetyczne) w każdym punkcie siatki

w dyskretnych krokach czasowych. Dyskretyzacja równań Maxwella bezpośrednio na siatce czasoprzestrzennej wykorzystuje przybliżenie różnic centralnych dla pochodnych cząstkowych. Wykorzystując różnice skończone do aproksymacji pochodnych w równaniach Maxwella, możliwe jest uzyskanie rozwiązania. Zdyskretyzowane w ten sposób równania Maxwella są rozwiązywane z wykorzystaniem jawnego schematu całkowania, który zapewnia charakterystykę ewolucji pola elektromagnetycznego w czasie. Poniżej (na podstawie pracy [93]) przedstawiono metodę FDTD dla symulacji elektromagnetycznych w ośrodkach opisanych relacjami konstytutywnymi z pochodnymi czasowymi ułamkowego rzędu. Następnie prezentowane są rezultaty dotyczące stabilności opublikowane w [81], których współautorem jest autor tej rozprawy doktorskiej. Równania Maxwella ułamkowego rzędu wyprowadzone są w oparciu o relacje konstytutywne oraz definicję pochodnej ułamkowej Grünwalda-Letnikova. Przedstawiony algorytm FDTD uwzględnia efekty pamięci i dyssypację energii w rozpatrywanych ośrodkach. Proponowana metoda FDTD wyprowadzona jest w oparciu o dyskretną aproksymację definicji pochodnej ułamkowej Grünwalda-Letnikova. Warunek stabilności dla proponowanej metody FDTD wyprowadzono w oparciu o numeryczną relację dyspersyjną. Uzyskanie dokładnych wyników wymaga wysokiej rozdzielczości przestrzennej i zapamiętywania wcześniejszych wartości pola, więc przedstawiona metoda FDTD jest bardziej wymagająca pod względem obliczeniowym w porównaniu ze zwykłym algorytmem FDTD. Dodatkowo, aby zagwarantować stabilność obliczeń FDTD, rozmiar kroku czasowego musi być mniejszy lub równy granicy stabilności Couranta-Friedricha-Lewy'ego (CFL) [94]. W wyniku intensywnego rozwoju nowych modeli matematycznych dla ośrodków elektromagnetycznych, zagadnienie stabilności FDTD jest badane intensywnie w ostatnich latach [95, 96, 97].

Metoda FDTD dla mediów opisanych relacjami konstytutywnymi z pochodnymi czasowymi ułamkowego rzędu

Metoda FDTD opiera się na skokowej aktualizacji (ang. *leapfrog update*) pól elektrycznego i magnetycznego za pomocą dyskretyzowanych równań Maxwella z rotacją [62]. Pochodne ułamkowego rzędu w relacjach konstytutywnych (3.19)–(3.20) pozwalają na uwzględnienie strat energii w równaniach Maxwella. Dlatego możemy pominąć przewodnictwo i zapisać wzory opisujące właściwości dynamiczne pola elektromagnetycznego w następujący sposób:

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\mu_\gamma D_t^\gamma \mathbf{H} - \mathbf{M}_s \quad (4.73)$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = \epsilon_\beta D_t^\beta \mathbf{E} + \mathbf{J}_s. \quad (4.74)$$

W powyższych równaniach $\mathbf{J}_s$ i $\mathbf{M}_s$ oznaczają odpowiednio gęstość prądu źródła elektrycznego i magnetycznego. W proponowanym schemacie FDTD dla relacji konstytutywnych z pochodną ułamkowego rzędu, stosowana jest definicja Grünwalda-Letnikova (2.42), patrz [1, Sekcja 20.1-20.4] rzędu $\alpha > 0$. Dla kompletności wywodu zapiszmy ją tutaj jeszcze raz w postaci ilorazu różnicowego

$$D^\alpha f(t) = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{\Delta_h^\alpha f(t)}{h^\alpha} \quad (4.75)$$

gdzie

$$\Delta_h^\alpha f(t) = \sum_{l=0}^{\infty} P_l(\alpha) f(t - lh) \quad (4.76)$$

oraz

$$P_l(\alpha) = (-1)^l \binom{\alpha}{l}. \quad (4.77)$$

Ta forma definicji jest naturalnym wyborem, gdy rozważa się metody numeryczne obejmujące pochodne ułamkowego rzędu. Szereg o wystarczająco małym kroku h można uznać za dobre przybliżenie pochodnej. Warto jeszcze raz wspomnieć, że pochodna Grünwalda-Letnikova zdefiniowana powyżej pokrywa się (dla bardzo szerokiej klasy funkcji) z definicją Marchaud (2.39) (stosowaną przez nas w badaniach). Na podstawie (4.76) można zdefiniować różnicę ułamkową, umożliwiającą symulację w czasie dyskretnym modeli ułamkowego rzędu w elektromagnetyzmie

$$\Delta^\alpha f_k = \sum_{l=0}^k P_l(\alpha) q^{-l} f_k \quad (4.78)$$

gdzie f_k oznacza funkcję dyskretną, taką jak $f_k = f(k\Delta t)$ (Δt to okres próbkowania), q^{-1} oznacza operator przesunięcia wstecznego, a $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ to indeks czasu. W naszych rozważaniach zakładamy, że funkcje są przyczynowe (tj. $f(t) = 0$ dla $t < 0$), stąd w (4.78) ustalamy górną granicę sumowania na k . Dla całkowitego rzędu pochodnej, definicje Grünwalda-Letnikova i Marchaud sprowadzają się do standardowej definicji pochodnej [98].

Po przybliżeniu w (4.73) i (4.74) pochodnych przestrzennych przez różnice centralne [99] i pochodnych ułamkowych czasu przez sumę skończoną (4.78) (przy założeniu $\beta = \gamma = \alpha$) dzieloną przez $(\Delta t)^\alpha$ (gdzie Δt to krok czasowy całkowania), otrzymujemy następujące zależności, które służą do obliczenia nowych wartości pola elektrycznego i magnetycznego

$$\begin{aligned} H_x^{n+\frac{1}{2}} \left(i, j + \frac{1}{2}, k + \frac{1}{2} \right) = & \\ & - \sum_{l=1}^n P_l^\alpha H_x^{n-l+\frac{1}{2}} \left(i, j + \frac{1}{2}, k + \frac{1}{2} \right) + \\ & \frac{(\Delta t)^\alpha}{\mu_\alpha} \left(\frac{E_y^n(i, j + \frac{1}{2}, k + 1) - E_y^n(i, j + \frac{1}{2}, k)}{\Delta z} + \right. \\ & \left. - \frac{E_z^n(i, j + 1, k + \frac{1}{2}) - E_z^n(i, j, k + \frac{1}{2})}{\Delta y} \right) \end{aligned} \quad (4.79)$$

$$\begin{aligned} H_y^{n+\frac{1}{2}} \left(i + \frac{1}{2}, j, k + \frac{1}{2} \right) = & \\ & - \sum_{l=1}^n P_l^\alpha H_y^{n-l+\frac{1}{2}} \left(i + \frac{1}{2}, j, k + \frac{1}{2} \right) + \\ & \frac{(\Delta t)^\alpha}{\mu_\alpha} \left(\frac{E_z^n(i + 1, j, k + \frac{1}{2}) - E_z^n(i, j, k + \frac{1}{2})}{\Delta x} + \right. \\ & \left. - \frac{E_x^n(i + \frac{1}{2}, j, k + 1) - E_x^n(i + \frac{1}{2}, j, k)}{\Delta z} \right) \end{aligned} \quad (4.80)$$

$$\begin{aligned}
H_z^{n+\frac{1}{2}}\left(i+\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2}, k\right) = & \\
& - \sum_{l=1}^n P_l^\alpha H_z^{n-l+\frac{1}{2}}\left(i+\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2}, k\right) + \\
\frac{(\Delta t)^\alpha}{\mu_\alpha} \left(\frac{E_x^n\left(i+\frac{1}{2}, j+1, k\right) - E_x^n\left(i+\frac{1}{2}, j, k\right)}{\Delta y} + \right. & \quad (4.81) \\
& \left. - \frac{E_y^n\left(i+1, j+\frac{1}{2}, k\right) - E_y^n\left(i, j+\frac{1}{2}, k\right)}{\Delta x} \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
E_x^{n+1}\left(i+\frac{1}{2}, j, k\right) = & \\
& - \sum_{l=1}^n P_l^\alpha E_x^{n-l+1}\left(i+\frac{1}{2}, j, k\right) + \\
\frac{(\Delta t)^\alpha}{\varepsilon_\alpha} \left(\frac{H_z^{n+\frac{1}{2}}\left(i+\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2}, k\right) - H_z^{n+\frac{1}{2}}\left(i+\frac{1}{2}, j-\frac{1}{2}, k\right)}{\Delta y} + \right. & \quad (4.82) \\
& \left. - \frac{H_y^{n+\frac{1}{2}}\left(i+\frac{1}{2}, j, k+\frac{1}{2}\right) - H_y^{n+\frac{1}{2}}\left(i+\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2}, k-\frac{1}{2}\right)}{\Delta z} \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
E_y^{n+1}\left(i, j+\frac{1}{2}, k\right) = & \\
& - \sum_{l=1}^n P_l^\alpha E_y^{n-l+1}\left(i, j+\frac{1}{2}, k\right) + \\
\frac{(\Delta t)^\alpha}{\varepsilon_\alpha} \left(\frac{H_x^{n+\frac{1}{2}}\left(i, j+\frac{1}{2}, k+\frac{1}{2}\right) - H_x^{n+\frac{1}{2}}\left(i, j+\frac{1}{2}, k-\frac{1}{2}\right)}{\Delta z} + \right. & \quad (4.83) \\
& \left. - \frac{H_z^{n+\frac{1}{2}}\left(i+\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2}, k\right) - H_z^{n+\frac{1}{2}}\left(i-\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2}, k\right)}{\Delta x} \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
E_z^{n+1}\left(i, j, k+\frac{1}{2}\right) = & \\
& - \sum_{l=1}^n P_l^\alpha E_z^{n-l+1}\left(i, j, k+\frac{1}{2}\right) + \\
\frac{(\Delta t)^\alpha}{\varepsilon_\alpha} \left(\frac{H_y^{n+\frac{1}{2}}\left(i+\frac{1}{2}, j, k+\frac{1}{2}\right) - H_y^{n+\frac{1}{2}}\left(i-\frac{1}{2}, j, k+\frac{1}{2}\right)}{\Delta x} + \right. & \quad (4.84) \\
& \left. - \frac{H_x^{n+\frac{1}{2}}\left(i, j+\frac{1}{2}, k+\frac{1}{2}\right) - H_x^{n+\frac{1}{2}}\left(i, j-\frac{1}{2}, k+\frac{1}{2}\right)}{\Delta y} \right).
\end{aligned}$$

Indeksy i, j, k odpowiadają kierunkom x, y, z w kartezjańskim układzie współrzędnych, natomiast n i Δt oznaczają odpowiednio indeks czasu i rozmiar kroku czasowego całkowania (jak wyżej wspomniano).

Współczynniki pochodnej Grünwalda-Letnikova $P_l^\alpha = (-1^l) \binom{\alpha}{l}$ można obliczyć w sposób rekurencyjny, co pozwala na zmniejszenie narzutu obliczeniowego w następujący sposób:

$$P_l^\alpha = \left(1 - \frac{1+\alpha}{l}\right) P_{l-1}^\alpha, \quad P_0^\alpha = 1. \quad (4.85)$$

W przypadku jednowymiarowym powyższe równania mogą być uproszczone do postaci

$$H_y^{n+\frac{1}{2}}\left(k+\frac{1}{2}\right) = -\sum_{l=1}^n P_l^\alpha H_y^{n-l+\frac{1}{2}}\left(k+\frac{1}{2}\right) - \frac{(\Delta t)^\alpha}{\mu_\alpha} \frac{E_x^n(k+1) - E_x^n(k)}{\Delta z} \quad (4.86)$$

$$E_x^{n+1}(k) = -\sum_{l=1}^n P_l^\alpha E_x^{n-l+1}(k) - \frac{(\Delta t)^\alpha}{\varepsilon_\alpha} \frac{H_y^{n+\frac{1}{2}}\left(k+\frac{1}{2}\right) - H_y^{n+\frac{1}{2}}\left(k-\frac{1}{2}\right)}{\Delta z}. \quad (4.87)$$

Warunek stabilności metody FDTD dla mediów opisanych relacjami konstytutywnymi z pochodnymi czasowymi ułamkowego rzędu

W przypadku metody FDTD całkowitego rzędu ($\alpha = 1$) rozmiar kroku czasowego jest ograniczony przez warunek stabilności CFL [62]

$$\Delta t \leq \frac{1}{c_0 \sqrt{\frac{1}{(\Delta x)^2} + \frac{1}{(\Delta y)^2} + \frac{1}{(\Delta z)^2}}} \quad (4.88)$$

gdzie c_0 oznacza prędkość fali elektromagnetycznej w medium wypełniającym dziedzinę obliczeniową. Spełnienie tego warunku jest wymagane do zapewnienia stabilności symulacji. Jednakże warunek (4.88) nie jest wystarczający dla FDTD w ośrodkach opisanych przez relacje konstytutywne z pochodnymi czasowymi ułamkowego rzędu. Zgodnie ze standardowym wyprowadzeniem warunku stabilności FDTD dla stałych przenikalności elektrycznej i magnetycznej [62], limit kroku czasowego jest analogicznie wyprowadzany dla FDTD w ośrodkach opisanych przez relacje konstytutywne z pochodnymi czasowymi ułamkowego rzędu. Otrzymuje się wtedy warunek

$$\Delta t \leq 2^{1-\frac{1}{\alpha}} \left(\frac{\sqrt{\epsilon_\alpha \mu_\alpha}}{\sqrt{\frac{1}{(\Delta x)^2} + \frac{1}{(\Delta y)^2} + \frac{1}{(\Delta z)^2}}} \right)^{\frac{1}{\alpha}}. \quad (4.89)$$

Wyprowadzenie powyższego warunku szczegółowo opisane jest w [93] (Załącznik A-C). Ta nowa granica kroku czasowego jest uzyskiwana poprzez analizę zależności numeryczno-dyspersyjnej. Gdy założymy $\alpha = 1$, warunek (4.89) upraszcza się do przypadku całkowitego rzędu (4.88). W symulacji jednowymiarowej warunek stabilności upraszcza się do

$$\Delta t \leq 2^{1-\frac{1}{\alpha}} (\sqrt{\epsilon_\alpha \mu_\alpha} \Delta z)^{\frac{1}{\alpha}}. \quad (4.90)$$

W niniejszej pracy proponujemy alternatywne wyprowadzenie warunku stabilności w stosunku do tego przedstawionego w [93] ze względu na zastosowanie procedury wyprowadzenia zaproponowanej w [100]. Co więcej, jest ono bardziej ogólne niż metoda [93], ponieważ dopuszcza różne rzędy ułamkowe w relacjach konstytutywnych z pochodnymi ułamkowego rzędu dla pól elektrycznego i magnetycznego.

Wzory schematu FDTD (4.79)–(4.84) można zredukować do pojedynczej pary równań dla składników pola elektrycznego i magnetycznego, stosując cykliczną rotację indeksów i, j, k oraz x, y, z . Niech natężenia pola elektrycznego i magnetycznego są reprezentowane we wzorach aktualizacji 3-D FDTD przez

$$H_p^n(i, j, k) = H_{p0} \xi^n e^{-j(i\Delta x K_x + j\Delta y K_y + k\Delta z K_z)} \quad (4.91)$$

$$E_p^n(i, j, k) = E_{p0} \xi^n e^{-j(i\Delta x K_x + j\Delta y K_y + k\Delta z K_z)} \quad (4.92)$$

gdzie $p = x, y, z$, $j = \sqrt{-1}$, $\mathbf{K} = [K_x, K_y, K_z]$ jest wektorem falowym, podczas gdy H_{p0} i E_{p0} są stałymi amplitudami. Stabilność rozwiązania jest określona przez zachowanie czynnika ξ^n . Oznacza to, że jeśli $|\xi| > 1$, to proponowane rozwiązanie (4.91)–(4.92) równań FDTD jest niestabilne. Naszym celem jest znalezienie granicy kroku czasowego Δt_{CFL} odpowiadającego $|\xi| = 1$, dla którego symulacja FDTD jest stabilna ($\Delta t \leq \Delta t_{CFL}$). Podstawmy (4.91)–(4.92) do równań schematu FDTD z relacjami konstytutywnymi z pochodnymi czasowymi ułamkowego rzędu. Otrzymamy wówczas amplitudy pola H_{x0} i E_{x0}

$$\frac{\mu_\gamma W_\gamma}{2j(\Delta t)^\gamma} H_{x0} = E_{z0} \frac{\sin\left(\frac{K_y \Delta y}{2}\right)}{\Delta y} - E_{y0} \frac{\sin\left(\frac{K_z \Delta z}{2}\right)}{\Delta z} \quad (4.93)$$

$$\frac{\epsilon_\beta W_\beta}{2j(\Delta t)^\beta} E_{x0} = -H_{z0} \frac{\sin\left(\frac{K_y \Delta y}{2}\right)}{\Delta y} + H_{y0} \frac{\sin\left(\frac{K_z \Delta z}{2}\right)}{\Delta z} \quad (4.94)$$

gdzie

$$W_\alpha = \sum_{l=0}^n P_l^\alpha \xi^{\frac{1}{2}-l} \quad (4.95)$$

dla $\alpha = \beta, \gamma$ oraz n oznaczającego alternatywnie bieżący numer iteracji albo całkowitą liczbę iteracji N procedury aktualizacji FDTD. Równania analogiczne do (4.93)–(4.94) można uzyskać poprzez odpowiednią rotację indeksów x, y, z . Następnie uzyskane równania można zebrać w równanie macierzowe

$$\underbrace{\begin{bmatrix} -\frac{\mu_\gamma W_\gamma}{(\Delta t)^\gamma} \mathbf{I} & -\mathbf{D} \\ \mathbf{D} & -\frac{\epsilon_\beta W_\beta}{(\Delta t)^\beta} \mathbf{I} \end{bmatrix}}_{=\mathbf{U}} \begin{bmatrix} H_{x0} \\ H_{y0} \\ H_{z0} \\ E_{x0} \\ E_{y0} \\ E_{z0} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (4.96)$$

gdzie $\mathbf{I}$ jest macierzą jednostkową o rozmiarze 3×3 i

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} 0 & -\delta_z & \delta_y \\ \delta_z & 0 & -\delta_x \\ -\delta_y & \delta_x & 0 \end{bmatrix} \quad (4.97)$$

$$\delta_p = -\frac{2j \sin\left(\frac{K_p \Delta p}{2}\right)}{\Delta p} \quad (4.98)$$

dla $p = x, y, z$. Równanie macierzowe (4.96) jest jednorodne, zatem wyznacznik $\mathbf{U}$ musi być równy zeru, o ile chcemy uzyskać jakiekolwiek nietrywialne (niezerowe) rozwiązanie. Wszystkie podmacierze $\mathbf{U}$ są przemienne, zatem wyznacznik $\mathbf{U}$ można obliczyć w następujący sposób [101]:

$$\det(\mathbf{U}) = \det\left(\frac{\epsilon_\beta \mu_\gamma W_\beta W_\gamma}{(\Delta t)^{\beta+\gamma}} \mathbf{I} + \mathbf{D}^2\right). \quad (4.99)$$

Następnie otrzymuje się z (4.99)

$$-\frac{\epsilon_\beta \mu_\gamma W_\beta W_\gamma}{4(\Delta t)^{\beta+\gamma}} = \frac{\sin^2\left(\frac{K_x \Delta x}{2}\right)}{(\Delta x)^2} + \frac{\sin^2\left(\frac{K_y \Delta y}{2}\right)}{(\Delta y)^2} + \frac{\sin^2\left(\frac{K_z \Delta z}{2}\right)}{(\Delta z)^2}. \quad (4.100)$$

Granica między stabilnością a niestabilnością systemu elektromagnetycznego jest wyznaczana dla $|\xi| \rightarrow 1$ i $n \rightarrow +\infty$. Załóżmy, że $|\xi| > 1$ i $\xi \rightarrow -1$. Wówczas $\Delta t \rightarrow \Delta t_S$ i $W_\alpha \rightarrow j2^\alpha$ dla $\alpha = \beta, \gamma$. Stąd otrzymujemy z (4.100)

$$\frac{\epsilon_\beta \mu_\gamma 2^{\beta+\gamma-2}}{(\Delta t_S)^{\beta+\gamma}} = \frac{\sin^2\left(\frac{K_x \Delta x}{2}\right)}{(\Delta x)^2} + \frac{\sin^2\left(\frac{K_y \Delta y}{2}\right)}{(\Delta y)^2} + \frac{\sin^2\left(\frac{K_z \Delta z}{2}\right)}{(\Delta z)^2}. \quad (4.101)$$

Oznaczmy $\alpha = \frac{\beta+\gamma}{2}$ i obliczmy maksymalny rozmiar kroku czasowego Δt_S gwarantujący stabilność symulacji fali opisanej przez wektor falowy $\mathbf{K}$

$$\Delta t_S = \frac{2^{1-\frac{1}{\alpha}} (\sqrt{\epsilon_\beta \mu_\gamma})^{\frac{1}{\alpha}}}{\left(\sqrt{\frac{\sin^2\left(\frac{K_x \Delta x}{2}\right)}{(\Delta x)^2} + \frac{\sin^2\left(\frac{K_y \Delta y}{2}\right)}{(\Delta y)^2} + \frac{\sin^2\left(\frac{K_z \Delta z}{2}\right)}{(\Delta z)^2}} \right)^{\frac{1}{\alpha}}}. \quad (4.102)$$

Dla dowolnego wektora falowego $\mathbf{K}$ opisującego falę rozchodzącą się w siatce FDTD można oszacować mianownik (4.102), ponieważ $|\sin \phi| \leq 1$ dla dowolnego rzeczywistego ϕ . Stąd otrzymujemy następujący warunek stabilności dla FDTD z relacjami konstytutywnymi zawierającymi pochodne czasowe ułamkowego rzędu:

$$\Delta t \leq \Delta t_{CFL} \quad (4.103)$$

gdzie

$$\Delta t_{CFL} = \frac{2^{1-\frac{1}{\alpha}} (\sqrt{\epsilon_\beta \mu_\gamma})^{\frac{1}{\alpha}}}{\left(\sqrt{\frac{1}{(\Delta x)^2} + \frac{1}{(\Delta y)^2} + \frac{1}{(\Delta z)^2}} \right)^{\frac{1}{\alpha}}}. \quad (4.104)$$

Dla $\alpha = 1$ upraszcza się to do dobrze znanego warunku stabilności CFL dla standardowej metody FDTD (4.88).

Analiza numeryczna otrzymanego warunku stabilności

Dla zwięzłości rozważmy jednowymiarową metodę FDTD z relacjami konstytutywnymi z pochodnymi czasowymi ułamkowego rzędu. W takim przypadku równanie charakterystyczne (4.100) można zapisać jako

$$f(\xi^{-1}) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\sin^2\left(\frac{K_z \Delta z}{2}\right)}{(\Delta z)^2} + \frac{\epsilon_\beta \mu_\gamma W_\beta W_\gamma}{4(\Delta t)^{2\alpha}} = 0 \quad (4.105)$$

a granicę stabilności (4.104) można zapisać jako

$$\Delta t_{CFL} = 2^{1-\frac{1}{\alpha}} (\sqrt{\epsilon_\beta \mu_\gamma} \Delta z)^{\frac{1}{\alpha}} \quad (4.106)$$

dla propagacji fali wzdłuż kierunku z .

Rozważmy falę wprowadzoną do jednowymiarowej siatki FDTD ($\Delta z = 0,01\mu\text{m}$, $\alpha = 0,995$, podczas gdy parametry ϵ_α i μ_α są ustawione jako wartości liczbowe odpowiadające $\alpha = 1$ tak jak

w próżni), o częstotliwości $f = 590$ THz i wektorze falowym $K_z = \frac{2\pi f}{c_0}$ (gdzie c_0 oznacza prędkość światła w próżni). Zbadajmy stabilność za pomocą metody numerycznej [65, 102] opartej na algorytmie globalnego znajdowania pierwiastków i biegunów zespolonych (ang. *global roots and poles finding* – skrót GRPF) [103].

Ten test stabilności ma zastosowanie do układów, dla których pierwiastki równania charakterystycznego wewnątrz okręgu jednostkowego na płaszczyźnie zespolonej implikują niestabilność. Stąd ma on zastosowanie do wyprowadzonego równania charakterystycznego (4.105), ponieważ jeśli $\nu = \xi^{-1}$ i $|\nu| < 1$, to FDTD jest niestabilne (patrz (4.91)–(4.92)). Algorytm GPRF działa na czterech kwadrantach płaszczyzny zespolonej ($\{Q_1 : 0 \leq \arg[f(\nu)] < \pi/2\}$, $\{Q_2 : \pi/2 \leq \arg[f(\nu)] < \pi\}$, $\{Q_3 : \pi \leq \arg[f(\nu)] < 3\pi/2\}$, $\{Q_4 : 3\pi/2 \leq \arg[f(\nu)] < 2\pi\}$). Pierwiastki rozpatrywanego równania $f(\nu) = 0$ są wykrywane na podstawie triangulacji płaszczyzny (lub okręgu jednostkowego) i zasady argumentu Cauchy'ego. Jeśli istnieje zmiana fazy wokół punktu wewnątrz okręgu jednostkowego, która jest równa $2q\pi$ w kierunku przeciwnym do ruchu wskazówek zegara, to punkt ten jest pierwiastkiem rzędu q , a metoda FDTD jest niestabilna. Więcej szczegółów na temat algorytmu GRPF można znaleźć w pracy źródłowej [103].

Rys. 4.6 przedstawia zespoloną płaszczyznę ν z kwadrantami fazy oznaczonymi kolorami dla funkcji $f(\nu)$ danej równaniem charakterystycznym (4.105) i wyrażeniem (4.95) dla $F_{CFL} = 1$ i $n = 20$. Uzyskano czterdzieści zespolonych zer poza okręgiem jednostkowym. Wynika to z faktu, że w tym przypadku rozważana funkcja jest wielomianem rzędu 40. Chociaż wokół okręgu jednostkowego występują dwa pierwiastki (tj. $\nu_1 = 0,993 - 0,12j$ i $\nu_2 = 0,993 + 0,12j$), ich moduły są większe od jedności, co oznacza, że wewnątrz okręgu jednostkowego nie ma pierwiastka. Te pierwiastki widoczne są jako zmiany fazy pomiędzy kwadrantami $Q_1 \rightarrow Q_2 \rightarrow Q_3 \rightarrow Q_4$ w kierunku przeciwnym do ruchu wskazówek zegara na płaszczyźnie zespolonej ν (tj. widoczne są jako zmiana kolorów $\text{czerwony} \rightarrow \text{żółty} \rightarrow \text{zielony} \rightarrow \text{niebieski}$ w kierunku przeciwnym do ruchu wskazówek zegara wokół rozpatrywanego punktu). Oznacza to, że metoda FDTD jest stabilna, co zgadza się z wyprowadzonym warunkiem stabilności.

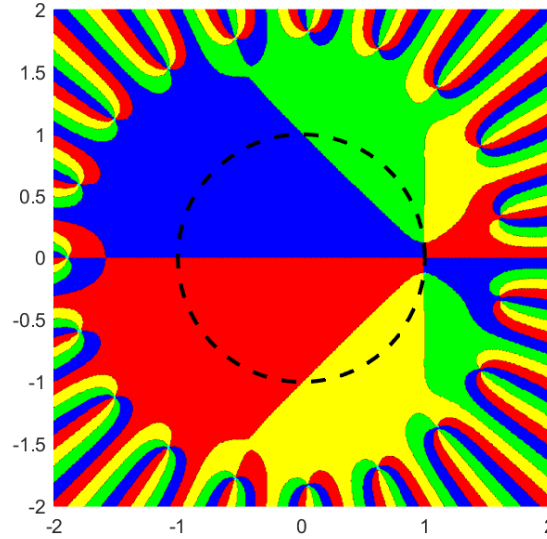
Rys. 4.7 przedstawia zespoloną płaszczyznę ν z kwadrantami fazy oznaczonymi kolorami dla funkcji $f(\nu)$ danej równaniem charakterystycznym (4.105) i (4.95) dla $F_{CFL} = 1$ i $n = 100$. Dla tej funkcji $f(\nu)$ uzyskano dwieście zespolonych zer poza okręgiem jednostkowym. Ponownie, chociaż istnieją dwa pierwiastki wokół okręgu jednostkowego (tj. $\nu_1 = 0,993 - 0,12j$ i $\nu_2 = 0,993 + 0,12j$), ich moduły są większe od jedności, co oznacza, że nie ma pierwiastka wewnątrz okręgu jednostkowego. Oznacza to, że metoda FDTD jest stabilna, co jest zgodne z wyprowadzonym warunkiem stabilności.

Rozważmy przypadek, gdy $n \rightarrow +\infty$. Wówczas (4.95) można obliczyć jako

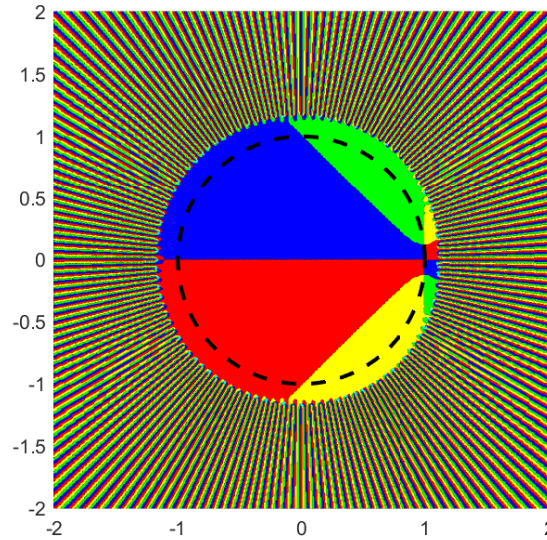
$$W_\alpha = \sum_{l=0}^{+\infty} P_l^\alpha \xi^{\frac{1}{2}-l} = \xi^{\frac{1}{2}} (1 - \xi^{-1})^\alpha \quad (4.107)$$

dla $|\xi^{-1}| < 1$ (tj. $|\nu| < 1$) i $\alpha = \beta, \gamma$. Oznacza to, że pierwiastki wewnątrz okręgu jednostkowego powodujące niestabilności, nadal można wykryć za pomocą proponowanej metody numerycznej.

Dla danych parametrów fali, odwrotność wyrażenia $|\sin(\frac{K_z \Delta z}{2})|^{\frac{1}{\alpha}}$ jest równa 16,41. W przy-



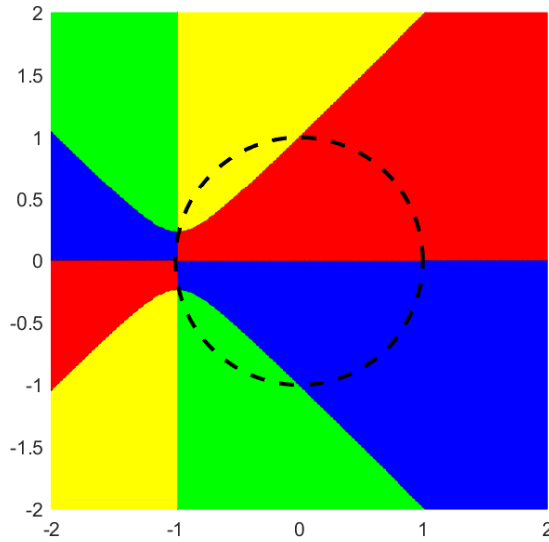
rys. 4.6. Kwadranty fazy ($\color{red}\blacksquare$ Q_1 , $\color{yellow}\blacksquare$ Q_2 , $\color{green}\blacksquare$ Q_3 , $\color{blue}\blacksquare$ Q_4) dla funkcji $f(\nu)$ gdy $F_{CFL} = 1$ oraz $n = 20$. Okrąg jednostkowy oznaczono linią - -.



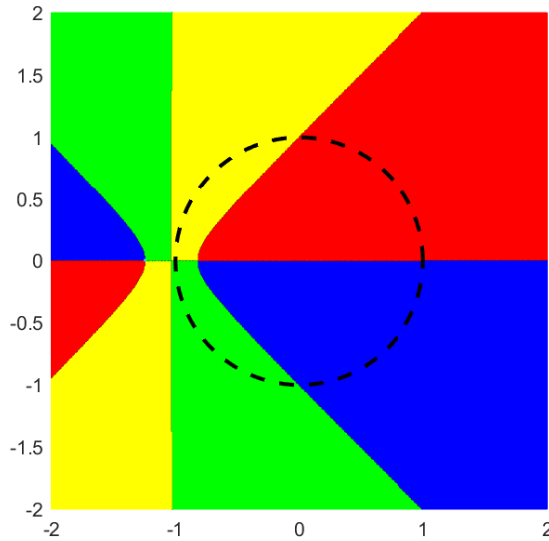
rys. 4.7. Kwadranty fazy ($\color{red}\blacksquare$ Q_1 , $\color{yellow}\blacksquare$ Q_2 , $\color{green}\blacksquare$ Q_3 , $\color{blue}\blacksquare$ Q_4) dla funkcji $f(\nu)$ gdy $F_{CFL} = 1$ oraz $n = 100$. Okrąg jednostkowy oznaczono linią - -.

padku monochromatycznym można zwiększyć rozmiar kroku czasowego ograniczony zwykle przez Δt_{CFL} do $\Delta t = F_{CFL} \Delta t_{CFL}$, gdzie współczynnik CFL jest dany przez $F_{CFL} = 16,41$ [95]. Rys. 4.8 przedstawia zespoloną płaszczyznę ν z kwadrantami fazy oznaczonymi kolorami dla funkcji $f(\nu)$ danej równaniem charakterystycznym (4.105) i (4.107) dla $F_{CFL} = 16,3$ i $n \rightarrow \infty$. Uzyskano dwa pierwiastki zespolone (tj. $\nu_1 = -0,98 - 0,23j$ i $\nu_2 = -0,98 + 0,23j$). Ich moduły są większe od jedności, co oznacza, że metoda FDTD jest stabilna.

Rys. 4.9 przedstawia zespoloną płaszczyznę ν z kwadrantami fazy oznaczonymi kolorami dla funkcji $f(\nu)$ danej równaniem charakterystycznym (4.105) i (4.107) dla $F_{CFL} = 16,5$ i $n \rightarrow \infty$. Uzyskano dwa pierwiastki zespolone (tj. $\nu_1 = -0,82$ i $\nu_2 = -1,24$). Moduł ν_1 jest mniejszy od jedności, co oznacza, że metoda FDTD jest niestabilna.



rys. 4.8. Kwadranty fazy ($\color{red}\blacksquare$ Q_1 , $\color{yellow}\blacksquare$ Q_2 , $\color{green}\blacksquare$ Q_3 , $\color{blue}\blacksquare$ Q_4) dla funkcji $f(\nu)$ gdy $F_{CFL} = 16.3$ oraz $n \rightarrow +\infty$. Okrąg jednostkowy oznaczono linią - -.



rys. 4.9. Kwadranty fazy ($\color{red}\blacksquare$ Q_1 , $\color{yellow}\blacksquare$ Q_2 , $\color{green}\blacksquare$ Q_3 , $\color{blue}\blacksquare$ Q_4) dla funkcji $f(\nu)$ gdy $F_{CFL} = 16.5$ oraz $n \rightarrow +\infty$. Okrąg jednostkowy oznaczono linią - -.

Przedstawiona procedura pozwala określić maksymalny rozmiar kroku czasowego gwarantujący stabilność monochromatycznych symulacji FDTD w ośrodkach opisanych relacjami konstytutywnymi z pochodnymi czasowymi ułamkowego rzędu. Równania podstawowe metody wyprowadzone są z warunkiem stabilności obowiązującym w przestrzeni 3-D. Ponadto, warunek ten przeanalizowano numerycznie na płaszczyźnie zespolonej z wykorzystaniem algorytmu GPRF. Wykazano, że zgodnie z równaniem charakterystycznym, rozmiar kroku czasowego można zwiększyć powyżej granicy CFL w przypadku monochromatycznym. Wyniki te są przydatne dla badaczy badających techniki numeryczne modelujące procesy elektromagnetyczne opisane równaniem dyfuzyjno-falowym i pochodnymi ułamkowego rzędu. Stabilność metod numerycznych jest krytyczna dla zapewnienia dokładnych i niezawodnych rozwiązań, ponieważ niestabilność może prowadzić do rozbieżnych lub fizycznie nieprawdopodobnych wyników.

4.2.4. Metoda różnic skończonych Cranka-Nicolsona w dziedzinie czasu (CN-FDTD)

Metoda CN-FDTD to bezwarunkowo stabilna metoda numeryczna służąca do rozwiązywania równań różniczkowych cząstkowych, takich jak równania Maxwella. Usuwa ona standardowe ograniczenie stabilności metody FDTD poprzez zastosowanie schematu z dowolnymi krokami czasowymi, które praktycznie ogranicza dokładność poszukiwanego rozwiązania. Chociaż pozwala na większe kroki czasowe i wysoką rozdzielczość przestrzenną, prowadzi do powstania dużej, rzadkiej macierzy, która wymaga wydajnych metod numerycznych do poszukiwania rozwiązań. Metoda uśrednia wartości pola w bieżącym i kolejnym kroku czasowym, co zapewnia dokładniejsze i stabilniejsze podejście, ale potencjalnie powoduje słabo tłumione oscylacje w nieciągłościach.

Dyskretyzacja przestrzenna

Jak wcześniej zauważono, używając pochodnych ułamkowych w dziedzinie czasu, można uwzględnić straty energii w równaniach Maxwella. Prowadzi to do równań z rotacją, które zawierają pochodne czasowe ułamkowego rzędu (4.73), (4.74). Równania te można sformułować w postaci macierzowej jako równania przestrzeni stanu, co zapiszmy dla przypomnienia

$$\begin{bmatrix} D_t^\beta & 0 \\ 0 & D_t^\gamma \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{E} \\ \mathbf{H} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \epsilon_\beta^{-1} [\nabla \times] \\ -\mu_\gamma^{-1} [\nabla \times] & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{E} \\ \mathbf{H} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\epsilon_\beta^{-1} & 0 \\ 0 & -\mu_\gamma^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{J}_s \\ \mathbf{M}_s \end{bmatrix}. \quad (4.108)$$

Aby zaimplementować CN-FDTD, równanie (4.108) musi zostać zdyskretyzowane przestrzennie za pomocą siatki Yee [61], patrz Rys. 3.1.

Jak poprzednio, w tym celu dziedzina obliczeniowa V (tj. trójwymiarowy prostopadłościan w przestrzeni kartezjańskiej) jest rozkładana na mniejsze komórki prostopadłościanu $V_{i,j,k}$ w następujący sposób:

$$V = \{V_{i,j,k} \in \mathbb{R}^3 : [x_i, x_{i+1}] \times [y_j, y_{j+1}] \times [z_k, z_{k+1}]\} \quad (4.109)$$

gdzie $i = 0, \dots, N_x - 1$, $j = 0, \dots, N_y - 1$, $k = 0, \dots, N_z - 1$. Objętość komórki $V_{i,j,k}$ jest równa $\Delta x_i \Delta y_j \Delta z_k$, gdzie $\Delta x_i = x_{i+1} - x_i$, $\Delta y_j = y_{j+1} - y_j$, $\Delta z_k = z_{k+1} - z_k$. Zatem całkowita liczba komórek w rozpatrywanej dziedzinie jest równa $N_x N_y N_z$. W praktyce wartości pola brzegowego są stałe ze względu na warunki brzegowe. Zakładamy zatem, że składowe E_x , E_y , E_z , H_x , H_y , H_z są próbkowane odpowiednio w punktach, których liczba odpowiednio wynosi N_{ex} , N_{ey} , N_{ez} , N_{hx} , N_{hy} , N_{hz} .

Przy takiej siatce można przeprowadzić dyskretyzację przestrzenną (4.108). Następnie otrzymujemy równanie w przestrzeni stanu

$$\mathbf{Dx} = \mathbf{Ax} + \mathbf{Bu} \quad (4.110)$$

gdzie

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} D_t^\beta & 0 \\ 0 & D_t^\gamma \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & \epsilon_\beta^{-1} [\nabla \times]_D^H \\ -\mu_\gamma^{-1} [\nabla \times]_D^E & 0 \end{bmatrix} \quad (4.111)$$

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} -\epsilon_\beta^{-1} \mathbf{I}_{N_e} & 0 \\ 0 & -\mu_\gamma^{-1} \mathbf{I}_{N_h} \end{bmatrix} \quad (4.112)$$

$$\mathbf{x} = [(E_x)_1, \dots, (E_x)_{N_{ex}}, (E_y)_1, \dots, (E_y)_{N_{ey}}, \\ (E_z)_1, \dots, (E_z)_{N_{ez}}, (H_x)_1, \dots, (H_x)_{N_{hx}}, \\ (H_y)_1, \dots, (H_y)_{N_{hy}}, (H_z)_1, \dots, (H_z)_{N_{hz}}]^T$$

$$\mathbf{u} = [(J_{sx})_1, \dots, (J_{sx})_{N_{ex}}, (J_{sy})_1, \dots, (J_{sy})_{N_{ey}}, \\ (J_{sz})_1, \dots, (J_{sz})_{N_{ez}}, (M_{sx})_1, \dots, (M_{sx})_{N_{hx}}, \\ (M_{sy})_1, \dots, (M_{sy})_{N_{hy}}, (M_{sz})_1, \dots, (M_{sz})_{N_{hz}}]^T$$

gdzie $N_e = N_{ex} + N_{ey} + N_{ez}$, $N_h = N_{hx} + N_{hy} + N_{hz}$, $\mathbf{I}_N$ jest kwadratową macierzą jednostkową o rozmiarze $N \times N$, podczas gdy $[\nabla \times]_D^E$ i $[\nabla \times]_D^H$ są dyskretnymi odpowiednikami operatora rotacji odpowiednio dla pola elektrycznego i magnetycznego.

Operatory macierzowe $[\nabla \times]_D^E$ i $[\nabla \times]_D^H$ o rozmiarze $N_h \times N_e$ i $N_e \times N_h$ aproksymują operator rotacji za pomocą ilorazów różnicowych dla wartości pól w rozpatrywanych i sąsiadujących komórkach. Dyskretyzacja przestrzenna musi być wystarczająco drobna, aby dokładnie przedstawić (4.108) przy użyciu (4.110) sformułowanego w dyskretniej dziedzinie przestrzennej.

Dyskretyzacja czasu

Zwykle równania przestrzeni stanu można dyskretyzować w dziedzinie czasu, stosując metodę Eulera zarówno w przód, jak i w tył, a także poprzez metodę CN (zwaną również metodą Tustina w literaturze inżynierii sterowania) [104]. Tutaj skupiamy się na dyskretyzacji CN w dziedzinie czasu, która jest zazwyczaj kosztowna obliczeniowo, ale z drugiej strony jest dokładna i bezwarunkowo stabilna.

Zakładając czas próbkowania Δt , oznaczamy $\mathbf{x}_k = \mathbf{x}(k\Delta t)$ oraz $\mathbf{u}_{k+\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}(\mathbf{u}_{k+1} + \mathbf{u}_k)$. Następnie aproksymujemy pochodną ułamkową zgodnie z definicją Grünwalda-Letnikova (4.75) z krokiem czasowym $\Delta t > 0$.

Przypadek $\beta = \gamma$

W tym przypadku uzyskuje się

$$\left(\mathbf{I}_N - \frac{T^\beta}{2} \mathbf{A} \right) \mathbf{x}_{k+1} = \left(\beta \mathbf{I}_N + \frac{T^\beta}{2} \mathbf{A} \right) \mathbf{x}_k + T^\beta \mathbf{B} \mathbf{u}_{k+\frac{1}{2}}$$

dla $k = 0$ oraz

$$\begin{aligned} \left(\mathbf{I}_N - \frac{T^\beta}{2} \mathbf{A} \right) \mathbf{x}_{k+1} = & \left(\beta \mathbf{I}_N + \frac{T^\beta}{2} \mathbf{A} \right) \mathbf{x}_k + T^\beta \mathbf{B} \mathbf{u}_{k+\frac{1}{2}} \\ & - \sum_{j=1}^k P_{j+1}(\beta) \mathbf{x}_{k-j} \end{aligned} \quad (4.113)$$

dla $k \geq 1$.

Przypadek $\beta \neq \gamma$

W tym przypadku uzyskuje się

$$\begin{aligned} \left(\mathbf{I}_N - \frac{1}{2} \mathbf{T}(\beta, \gamma) \mathbf{A} \right) \mathbf{x}_{k+1} = & \left(\mathbf{I}_N + \frac{1}{2} \mathbf{T}(\beta, \gamma) \mathbf{A} \right) \mathbf{x}_k \\ & + \mathbf{T}(\beta, \gamma) \mathbf{B} \mathbf{u}_{k+\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

dla $k = 0$ oraz

$$\begin{aligned} \left(\mathbf{I}_N - \frac{1}{2} \mathbf{T}(\beta, \gamma) \mathbf{A} \right) \mathbf{x}_{k+1} = & \left(\mathbf{I}_N + \frac{1}{2} \mathbf{T}(\beta, \gamma) \mathbf{A} \right) \mathbf{x}_k \\ & + \mathbf{T}(\beta, \gamma) \mathbf{B} \mathbf{u}_{k+\frac{1}{2}} - \sum_{j=2}^{k+1} \mathbf{P}_j(\beta, \gamma) \mathbf{x}_{k+1-j} \end{aligned} \quad (4.114)$$

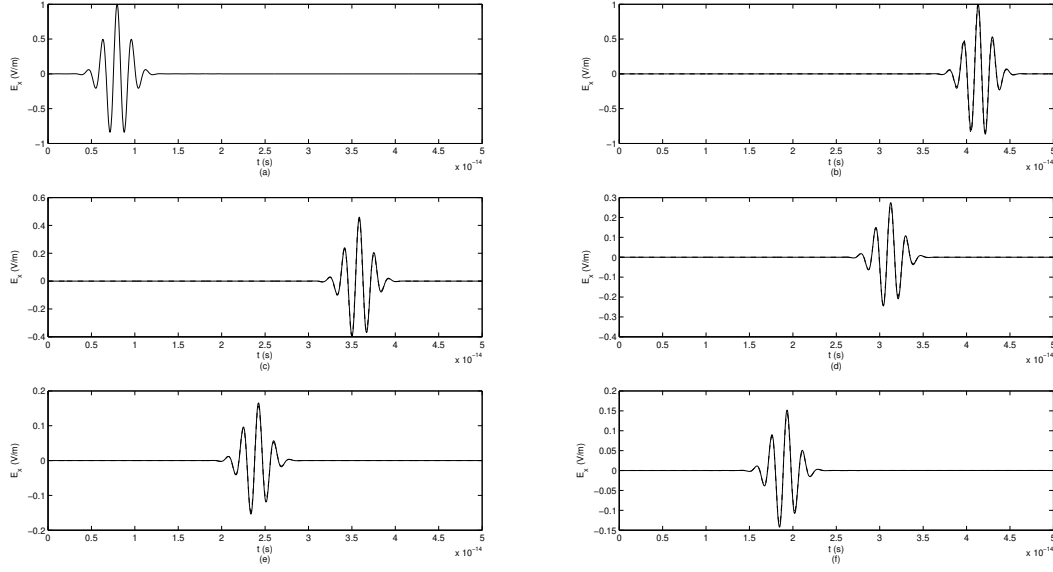
dla $k \geq 1$, gdzie

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_j(\beta, \gamma) = & \begin{bmatrix} P_j(\beta) \mathbf{I}_{N_e} & 0 \\ 0 & P_j(\gamma) \mathbf{I}_{N_h} \end{bmatrix} \\ \mathbf{T}(\beta, \gamma) = & \begin{bmatrix} T^\beta \mathbf{I}_{N_e} & 0 \\ 0 & T^\gamma \mathbf{I}_{N_h} \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Zazwyczaj macierze po lewej stronie powyższych równań są rzadkie, dlatego nie zaleca się ich odwracania w celu uzyskania postaci zbliżonej do standardowych równań w przestrzeni stanu z czasem dyskretnym, znanych z inżynierii sterowania [64]. W przeciwnym razie zastosowanie macierzy odwrotnej w iteracyjnej procedurze rozwiązywania równań zwiększyłoby zużycie pamięci i narzut obliczeniowy metody.

Stabilność metody CN-FDTD

W przypadku symulacji elektromagnetycznych wykorzystujących relacje konstytutywne całkowitego rzędu, metoda CN jest bezwarunkowo stabilna [105]. W prezentowanych badaniach stabilne symulacje z relacjami konstytutywnymi całkowitego rzędu są modyfikowane za pomocą pochodnych czasowych ułamkowego rzędu. Formalny dowód, że dyskretyzacja CN jest również bezwarunkowo stabilna w przypadku pochodnych czasowych ułamkowego rzędu, przedstawiono w [106]. W przedstawionych poniżej wynikach badań nie obserwujemy eksplozji wyników symulacji z powodu niestabilności proponowanej metody.



rys. 4.10. Propagacja sinusoidalnego impulsu modulowanego funkcją Gaussa w ośrodku z relacjami konstytutywnymi ułamkowego rzędu. Sygnał jest mierzony w odległości $L = 10 \mu\text{m}$. (a) Sygnał pobudzenia. (b) $\nu = 1$ (próżnia). (c) $\nu = 0,995$. (d) $\nu = 0,99$. (e) $\nu = 0,98$. (f) $\nu = 0,97$. Wyniki przedstawiono dla opracowanej metody CN-FDTD (–) i metody referencyjnej (---). Obie linie nakładają się na siebie.

Wyniki symulacji

Opracowana metoda CN-FDTD została zaimplementowana w kodzie symulacji jednokierunkowej propagacji niemonochromatycznej fali płaskiej (składowe E_x i H_y). Pozwala nam to łatwo odwołać się do wyników przedstawionych już w literaturze [87] w celu udowodnienia poprawności metody. Następnie fala wnika do ośrodka, na który pada i propaguje się w kierunku $+z$. Dlatego symulowany jest tzn. problem sygnalizacji, w którym pole elektryczne na granicy domeny wzbudza falę. Przebiegi fal w pewnej odległości L są obliczane przy użyciu proponowanej i referencyjnej metody [87]. Ustawiamy rząd pochodnych $\beta = \gamma = \nu$ na poziomie nieznacznie poniżej jednostki, tj. uwzględniamy jedynie niewielkie zaburzenia rzędów pochodnych czasowych w równaniach Maxwella (3.22)–(3.24). Rozważmy wzbudzenie, którym jest sinusoidalny impuls modulowany funkcją Gaussa, jak w [87]. Częstotliwość środkowa jest ustawiona na $f_c = 590 \text{ THz}$ (długość fali $\lambda_c = 508 \text{ nm}$ w próżni), a widmo obejmuje pasmo widzialne, tj. 430–750 THz (399–697 nm). Pozostałe parametry symulacji zachowujemy jak w symulacjach referencyjnych [87].

Wyniki symulacji pokazano na Rys. 4.10, gdzie przedstawiono przebiegi mierzone w odległości $L = 10 \mu\text{m}$ od źródła dla zmiennej wartości parametru ν . Sygnał pobudzenia przedstawiono na Rys. 4.10(a), natomiast wyniki dla przypadku referencyjnego próżni ($\nu = 1$) przedstawiono na Rys. 4.10(b). Na Rys. 4.10(c)–(f), wartości parametru ν ulegają zmniejszeniu. Ze względu na niewielką odległość propagacji sygnału, przebiegi impulsowe są uzyskiwane z silnie tłumionymi amplitudami. Jak można zauważyć, wyniki uzyskane z zastosowaniem proponowanej i referencyjnej metody pokrywają się, co dowodzi przydatności CN-FDTD do symulacji propagacji fal w ośrodkach opisanych relacjami

konstrytuwnymi z pochodnymi czasowymi ułamkowego rzędu. Proponowana metoda CN-FDTD pozwala na zmiany parametrów materiałowych w dziedzinie obliczeniowej, podobnie jak typowy schemat różnic skończonych. Dlatego jest bardziej elastyczna niż referencyjna metoda w dziedzinie częstotliwości [87]. Ponadto proponowana metoda jest rozszerzalna na symulacje wielowymiarowe (tj. działa nie tylko w jednym wymiarze).

5. PODSUMOWANIE PRACY

Pochodna ułamkowa jest potężnym narzędziem w modelowaniu matematycznym złożonych układów fizycznych. Jej zdolność do opisywania dynamiki sprawia, że jest ona odpowiednia do modelowania układów wykazujących efekty pamięci, takich jak systemy elektromagnetyczne i obwody elektryczne. Niniejsza praca bada zastosowania pochodnej ułamkowej w modelowaniu tych układów, koncentrując się na podstawach teoretycznych. Zjawiska fizyczne, takie jak propagacja fali w ośrodkach dyspersyjnych lub efekty pamięciowe w elementach obwodów elektrycznych często wykazują dynamikę rzędu ułamkowego ze względu na zależne od częstotliwości właściwości materiałów i rozpraszanie energii. Pochodna ułamkowa zapewnia możliwość modelowania tych zjawisk. W materiałach takich jak dielektryki lub metamateriały, propagacja fal elektromagnetycznych jest zależna od częstotliwości ze względu na dyspersję przenikalności elektrycznej i magnetycznej. Pochodna ułamkowa, oparta na definicji Marchaud lub Grünwalda-Letnikova, umożliwia modelowanie efektów dyspersyjnych poprzez włączenie wyrazów rzędu ułamkowego $(j\omega)^\alpha$ do równań Maxwella. Układy elektryczne, w tym obwody z elementami pamięci lub komponentami rzędu ułamkowego, korzystają znacząco ze zdolności pochodnej ułamkowej do modelowania niestandardowej dynamiki. Tradycyjne elementy obwodów (rezystory (R), kondensatory (C), cewki (L)) są modelowane przy użyciu równań różniczkowych rzędu całkowitego. Jednakże rzeczywiste komponenty, takie jak superkondensatory lub memrystory, wykazują zachowanie rzędu ułamkowego ze względu na efekty pamięci wewnętrznej. Pochodna ułamkowa umożliwia bardziej szczegółowe modelowanie tych komponentów, na przykład zależności napięcie-prąd superkondensatora. W obwodach RLC pochodna ułamkowa jest używana do modelowania strat energii i nieliniowych odpowiedzi, których nie można zwięźle opisać za pomocą klasycznych modeli. Memrystory, które zachowują pamięć poprzednich stanów elektrycznych, są z natury układami ułamkowego rzędu. Pochodna ułamkowa zapewnia naturalne ramy do modelowania ich histerezy, co prowadzi do dokładniejszych symulacji obwodów. Poprzez modelowanie efektów pamięci i nielokalności, użycie pochodnej ułamkowej pozwala tworzyć modele, które dobrze odpowiadają danym eksperymentalnym, szczególnie w systemach o złożonej dynamice. Parametr ułamkowego rzędu umożliwia *dostrojenie* modelu do określonych zachowań fizycznych, zapewniając większą elastyczność niż modele całkowitego rzędu. Postęp w metodach numerycznych, takich jak przybliżenia Grünwalda-Letnikova lub schematy różnic skończonych, uczynił praktycznym wdrożenie modeli opartych na pochodnej ułamkowej w oprogramowaniu takim jak Matlab, Python lub innych specjalistycznych narzędziach symulacyjnych.

Chociaż pochodna ułamkowa jest skutecznym narzędziem w modelowaniu zjawisk fizycznych, jej zastosowanie wymaga analizy w zależności od przypadku użycia. W szczególności użycie pochodnej ułamkowej w symulacjach numerycznych zwiększa wymagania obliczeniowe, szczególnie w przypadku dużych, złożonych systemów lub długich horyzontów czasowych. Wydajne algorytmy numeryczne są niezbędne, aby móc stosować modelowanie oparte o pochodne ułamkowego rzędu. Określenie

odpowiedniego rzędu ułamkowego wymaga danych eksperymentalnych lub technik optymalizacyjnych, co może być trudne w niektórych zastosowaniach. Fizyczna interpretacja modeli rzędu ułamkowego jest mniej intuicyjna niż modeli klasycznych, co wymaga głębszego zrozumienia rachunku ułamkowego rzędu wśród praktyków.

Tematyką niniejszej rozprawy doktorskiej jest zastosowanie pochodnej ułamkowej w elektromagnetyzmie i teorii obwodów. W niniejszej pracy pokazano, że zastosowanie pochodnej Marchaud nie prowadzi do sprzeczności matematycznych podczas modelowania propagacji sygnału elektromagnetycznego w środowisku opisanym przez relacje konstytutywne z pochodnymi czasowymi ułamkowego rzędu oraz modelowania elementów obwodów (ułamkowego rzędu), takich jak rezystor, cewka, kondensator czy nawet linia transmisyjna.

W celu wprowadzenia do tematu wykonano przegląd literatury dotyczącej rachunku różniczkowo-całkowego ułamkowego rzędu oraz przedstawiono jego przykładowe zastosowania w różnych dziedzinach nauki. Kolejno wprowadzono czytelnika do historii powstania rachunku różniczkowo-całkowego oraz przedstawiono główne definicje pochodnych ułamkowego rzędu spotykane w literaturze przedmiotu. Mnogość i różnorodność definicji wymusiła określenie podstawowych właściwości, jakie powinny spełniać pochodne ułamkowego rzędu, aby były aplikowalne w elektromagnetyzmie i teorii obwodów. Pokazano, że właściwości te z powodzeniem spełnia pochodna Marchaud, co kwalifikuje ją do aplikacji w naukach elektrycznych. Powyższe rozważania przedstawiono w rozdziale drugim.

W rozdziale trzecim przedstawiono przykładowe zastosowania pochodnej Marchaud w elektromagnetyzmie i teorii obwodów. Przedstawiono równania Maxwella wspierane przez relacje konstytutywne z pochodnymi czasowymi ułamkowego rzędu oraz wykazano, że można traktować je jako układ równań w przestrzeni stanów z czasem ciągłym w inżynierii sterowania. Wyprowadzono rozwiązania analityczne w czasie ciągłym oparte na macierzach przejść stanów dla propagacji fal elektromagnetycznych w ośrodkach opisanych pochodnymi ułamkowego rzędu. Opisano modele przybliżone z czasem dyskretnym oraz ich rozwiązania analityczne. Zaproponowano zestaw uproszczeń funkcji macierzy Mittag-Lefflera, które skutecznie ułatwiają symulację problemów z macierzami o dużym rozmiarze. Powyższe wyprowadzenia opublikowano w czasopiśmie „Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation” [60] w 2024 roku. W drugiej części rozdziału trzeciego przedstawiono równania elementów obwodów opisane przez modele ułamkowego rzędu takie jak rezystor, cewka, kondensator czy linie transmisyjne. Te rezultaty zostały zaprezentowane na konferencji IEEE Mixed Design of Integrated Circuits and Systems w 2020 roku.

W rozdziale czwartym przedstawiono różne metody rozwiązywania zagadnień opisanych przez modele ułamkowego rzędu. Przeprowadzono symulacje numeryczne propagacji fali w ośrodkach opisanych przez modele ułamkowego rzędu oraz określono warunki stabilności tych symulacji. Zaimplementowano metodę GRPF do weryfikacji stabilności przeprowadzonych symulacji. Powyższą implementację przedstawiono podczas konferencji International Microwave and Radar Conference w 2020 roku. W rozdziale czwartym przedstawiono też nową implementację bezwzględnie stabilnej

metody różnic skończonych w dziedzinie czasu Cranka-Nicolsona (CN-FDTD) do rozwiązywania równań Maxwella z relacjami konstytutywnymi ułamkowego rzędu. Metodę zaimplementowano w oprogramowaniu symulacyjnym i przeprowadzono symulacje propagacji niemonochromatycznej fali płaskiej w ośrodku opisanym przez relacje konstytutywne z pochodnymi czasowymi ułamkowego rzędu. Metodę oraz numeryczne wyniki symulacji przedstawiono na prezentacji ustnej podczas konferencji 18th European Conference on Antennas and Propagation w Glasgow w 2024 roku.

Podsumowując, do najważniejszych oryginalnych osiągnięć prezentowanych w pracy autor zalicza:

- określenie warunków aplikowalności pochodnej Marchaud w elektromagnetyzmie i teorii obwodów,
- wyprowadzenie rozwiązania analitycznego równań Maxwella w czasie ciągłym, opartego na macierzach przejść stanów dla propagacji fal elektromagnetycznych w ośrodkach opisanych przez relacje konstytutywne z pochodnymi czasowymi ułamkowego rzędu,
- określenie zestawu uproszczeń funkcji macierzy Mittag-Lefflera, które skutecznie ułatwiają symulację problemów z macierzami o dużym rozmiarze,
- przeprowadzenie symulacji numerycznych propagacji fali w ośrodkach opisanych przez modele ułamkowego rzędu oraz implementację metody GRPF do weryfikacji stabilności symulacji FDTD,
- implementację bezwzględnie stabilnej metody różnic skończonych Cranka-Nicolsona (CN-FDTD) do rozwiązywania równań Maxwella dla mediów opisanych przez relacje konstytutywne z pochodnymi czasowymi ułamkowego rzędu.

Głównym celem niniejszej pracy było wykazanie, że zastosowanie pochodnej Marchaud w elektromagnetyzmie i teorii obwodów nie prowadzi do sprzeczności matematycznych w modelowaniu systemów elektromagnetycznych i obwodów elektrycznych ułamkowego rzędu. W Sekcji 2.1 przedstawiono właściwości, które są niezbędne, aby stosować pochodne ułamkowego rzędu w analizie systemów elektromagnetycznych i obwodów elektrycznych. W Sekcji 2.2 przeanalizowano krytycznie popularne definicje pochodnych ułamkowego rzędu pokazując, że tylko definicja Marchaud spełnia wymagane wcześniej właściwości. Jednakże, definicja Grünwalda-Letnikova jest równoważna definicji Marchaud dla określonych funkcji i rzędów pochodnej, co również czyni ją użyteczną z punktu widzenia elektromagnetyzmu i teorii obwodów. W Sekcjach 3.1 i 3.5 pokazano, że naruszenie postulowanej własności półgrupy dla pochodnych czasowych ułamkowego rzędu prowadzi do różnych równań typu dyfuzyjno-falowego w dziedzinie czasu dla pola elektrycznego i magnetycznego (Sekcja 3.1) oraz napięcia i prądu w linii transmisyjnej ułamkowego rzędu (Sekcja 3.5). Taka sytuacja jest sprzeczna z rezultatem analizy w dziedzinie częstotliwości, gdzie pola elektryczne i magnetyczne oraz napięcie i prąd odpowiednio spełniają te same równania. Prowadzi to do absurdu i dowodzi konieczności stosowania pochodnych ułamkowego rzędu spełniających własność półgrupy (tj. definicji Marchaud i Grünwalda-Letnikova). Tym samym, głoszona teza została udowodniona.

Spis publikacji

W tej sekcji wymieniono wszystkie recenzowane publikacje w czasopismach i konferencjach, do których autor przyczynił się w trakcie swoich badań przed złożeniem pracy doktorskiej. Opublikowane materiały, do których odwołuje się cała rozprawa, są wymienione poniżej:

- **Trofimowicz, D.**, Stefański, T., Gulowski, J.(2024). Crank–Nicolson FDTD Method in Media Described by Time-Fractional Constitutive Relations. 2024 18th European Conference on Antennas and Propagation (EuCAP). <https://doi.org/10.23919/EuCAP60739.2024.10501157>
- **Trofimowicz, D.**, Stefański, T., Pietruszka, P., Gulowski, J.(2024). Testing Stability of FDTD in Media Described by Time-Fractional Constitutive Relations. 2024 25th International Microwave and Radar Conference (MIKON). <https://doi.org/10.23919/MIKON60251.2024.10633996>
- **Trofimowicz, D.**, Stefański, T., Gulowski, J., Talaśka T.(2024). Modelling and simulations in time-fractional electrodynamics based on control engineering methods. 2024 Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation 129(2). <https://doi.org/10.1016/j.cnsns.2023.107720>
- Stefański, T., **Trofimowicz, D.**, Gulowski, J. (2020). Simulation of Signal Propagation Along Fractional-Order Transmission Lines. 2020 27th International Conference on Mixed Design of Integrated Circuits and System (MIXDES). <https://doi.org/10.23919/MIXDES49814.2020.9155924>
- Gulowski, J., Stefański, T., **Trofimowicz, D.** (2020). On Applications of Fractional Derivatives in Circuit Theory (pp. 160-163). 2020 27th International Conference on Mixed Design of Integrated Circuits and System (MIXDES). <https://doi.org/10.23919/MIXDES49814.2020.9155559>
- Gulowski, J., Stefański, T., **Trofimowicz, D.** (2020). On Applications of Elements Modelled by Fractional Derivatives in Circuit Theory. 2020 Energies. <https://doi.org/10.3390/en13215768>

Ponadto autor przyczynił się do powstania następujących ogólnie dostępnych publikacji:

- **Trofimowicz, D.**, Kant, P., Lia, E., Michalski, J.(2022). Push-Push Oscillator Based on Packaged Space- Qualified Components Operating at 11.8 GHz. 2022 Conference: European Microwave Week At: Milan, Italy. <https://doi.org/10.23919/EuMC54642.2022.9924326>
- Kudriashov, V., Martin-Neira, M., Lia, E., Michalski, Kant, P., **Trofimowicz, D.**, Belloni, M., Jankovic, P., Waller, P., Brandt M. (2021). Laboratory Demonstration of the Local Oscillator Concept for the Event Horizon Imager. 2021 Journal of Astronomical Instrumentation, Vol. 10, No. 3 (2021) 2150010. <https://doi.org/10.1142/S2251171721500100>
- **Trofimowicz, D.**, Stefański, T.(2020). Multimodal Particle Swarm Optimization with Phase Analysis to Solve Complex Equations of Electromagnetic Analysis. 2020 23rd International Microwave and Radar Conference (MIKON). <https://doi.org/10.23919/MIKON48703.2020.9253937>

- **Trofimowicz, D.**, Stefański, T.(2020). Multimodal Genetic Algorithm with Phase Analysis to Solve Complex Equations of Electromagnetic Analysis. 2020 23rd International Microwave and Radar Conference (MIKON). <https://doi.org/10.23919/MIKON48703.2020.9253803>
- **Trofimowicz, D.**, Stefański, T.(2020). Testing Stability of Digital Filters Using Multimodal Particle Swarm Optimization with Phase Analysis. 2020 27th International Conference on Mixed Design of Integrated Circuits and System (MIXDES). <https://doi.org/10.23919/MIKON60251.2024.10633996>
- Grzymkowski Ł., **Trofimowicz, D.**, Stefański, T.(2020). Stability analysis of interconnected discrete-time fractional-order LTI state-space systems. 2020 International Journal of Applied Mathematics and Computer Science 30(4). <https://doi.org/10.34768/amcs-2020-0048>
- **Trofimowicz, D.**, Szczepiński, P., Kant, P., Lia, E., Michalski, J.(2019). Low Phase Noise Dual Redundant Master Local Oscillator operating in 3 GHz to 13 GHz. 2019 Conference: Microwave Technology and Techniques Workshop At: Noordwijk, The Netherlands.
- **Trofimowicz, D.**, Kordalski, W., Stefański, T. (2017). Zależność parametrów quasi-dwuwymiarowego modelu małosygnałowego tranzystora MOS od punktu pracy. 2017 Elektronika - Konstrukcje Technologie Zastosowania 1(9):9-12. <https://doi.org/10.15199/13.2017.9.2>
- **Trofimowicz, D.**, Kordalski, W. (2015). Wykorzystanie metody Nelder-Meada do identyfikacji wartości parametrów niequasi-statycznego modelu małosygnałowego tranzystora MOS. 2015 Przegląd Elektrotechniczny 1(9):193-196. <https://doi.org/10.15199/48.2015.09.50>

WYKAZ LITERATURY

- [1] S. G. Samko, A. A. Kilbas, and O. I. Marichev, *Fractional Integrals and Derivatives: Theory and Applications*. New York: Gordon and Breach, 1993.
- [2] I. Podlubny, "Fractional-order systems and π/λ - μ -controllers," *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 44, no. 1, pp. 208–214, 1999.
- [3] M. Al-Dhaifallah, "Fuzzy fractional-order pid control for heat exchanger," *Alexandria Engineering Journal*, vol. 63, pp. 11–16, 2023.
- [4] C. A. Monje, Y. Chen, B. M. Vinagre, D. Xue, and V. Feliu, *Fractional-order Systems and Controls: Fundamentals and Applications. Chapter: Position Control of a Single-link Flexible Robot*, pp. 273–300. London: Springer London, 2010.
- [5] P. A. M. Devan, R. Ibrahim, M. Omar, K. Bingi, M. Nagarajapandian, and H. Abdulrab, "A novel fractional-order dead-time compensating controller for the wireless networks," *Scientific Reports*, vol. 13, p. 17658, 2023.
- [6] A. Al-Mayyahi, W. Wang, and P. Birch, "Design of fractional-order controller for trajectory tracking control of a non-holonomic autonomous ground vehicle," *Journal of Control, Automation and Electrical Systems*, vol. 27, pp. 1–14, 10 2015.
- [7] R. Melício, V. Mendes, and J. Catalão, "Fractional-order control and simulation of wind energy systems with pmsg/full-power converter topology," *Energy Conversion and Management*, vol. 51, no. 6, pp. 1250–1258, 2010.
- [8] S. Das and K. Maharatna, "Fractional dynamical model for the generation of ecg like signals from filtered coupled van-der pol oscillators," *Computer Methods and Programs in Biomedicine*, vol. 112, no. 3, pp. 490–507, 2013.
- [9] Y.-F. Pu, J.-L. Zhou, and X. Yuan, "Fractional differential mask: A fractional differential-based approach for multiscale texture enhancement," *IEEE Transactions on Image Processing*, vol. 19, no. 2, pp. 491–511, 2010.
- [10] K. Kaur, N. Jindal, and K. Singh, "Fractional derivative based unsharp masking approach for enhancement of digital images," *Multimedia Tools and Applications*, vol. 80, pp. 3645–3679, Jan. 2021.
- [11] T. Kaczorek, "Positive linear systems consisting of n subsystems with different fractional orders," *IEEE Transactions on Circuits and Systems I: Regular Papers*, vol. 58, no. 6, pp. 1203–1210, 2011.
- [12] A. Shamim, A. G. Radwan, and K. N. Salama, "Fractional smith chart theory," *IEEE Microwave and Wireless Components Letters*, vol. 21, no. 3, pp. 117–119, 2011.

- [13] M. S. Sarafrasz and M. S. Tavazoei, "Realizability of fractional-order impedances by passive electrical networks composed of a fractional capacitor and rlc components," *IEEE Transactions on Circuits and Systems I: Regular Papers*, vol. 62, no. 12, pp. 2829–2835, 2015.
- [14] M. S. Sarafrasz and M. S. Tavazoei, "Passive realization of fractional-order impedances by a fractional element and rlc components: Conditions and procedure," *IEEE Transactions on Circuits and Systems I: Regular Papers*, vol. 64, no. 3, pp. 585–595, 2017.
- [15] M. Kline, *Mathematical thought from ancient to modern times, Vol. 1*. Oxford University Press, 1972.
- [16] Archimedes, *The Works of Archimedes*. Cambridge University Press, 1897. Later editions include the supplement "The Method of Archimedes", originally discovered by Heiberg, which was published as a supplement to the 1897 edition in 1909.
- [17] H. N. Jahnke, ed., *A History of Analysis*, vol. 24 of *History of Mathematics*. Providence, RI: American Mathematical Society and London Mathematical Society, 2003.
- [18] J. V. Grabiner, *The Origins of Cauchy's Rigorous Calculus*. Cambridge, Mass.: MIT Press, 1981.
- [19] A.-L. Cauchy, *Analyse Algébrique*. Paris: Libraires du Roi et de la Bibliothèque du Roi, 1821.
- [20] G. B. Riemann, "Abhandlungen der königlichen gesellschaft der wissenschaften zu göttingen," *Proceedings of the Royal Philosophical Society at Göttingen*, vol. 13, pp. 87–132, 1851.
- [21] G. W. Leibnitz, *Leibniz's Mathematische Schriften*, vol. 2. Hildesheim, Germany: Georg Olm, 1962.
- [22] N. H. Abel, "Opløsning af et par opgaver ved hjælp af bestemte integraler," *Magazin for Naturvidenskaberne*, vol. Aargang I, Bind 2, 1823.
- [23] N. H. Abel, "Auflösung einer mechanischen aufgabe," *Journal für die Reine und Angewandte Mathematik*, vol. I, pp. 153–157, 1826.
- [24] J. Liouville, "Mémoire sur quelques questions de géométrie et de mécanique, et sur un nouveau genre de calcul pour résoudre ces questions," *Journal de l'École Polytechnique*, vol. 13, no. 21, pp. 1–69, 1832.
- [25] J. Gulgowski, T. P. Stefanski, and D. Trofimowicz, "On applications of elements modelled by fractional derivatives in circuit theory," *Energies*, 2020.
- [26] K. B. Oldham and J. Spanier, *The Fractional Calculus*. New York: Academic Press, 1974.
- [27] A. A. Kilbas, H. M. Srivastava, and J. J. Trujillo, *Theory and Applications of Fractional Differential Equations*. Amsterdam, The Netherlands: Elsevier Science, 2006.
- [28] R. Sikora and S. Pawłowski, "Fractional derivatives and the laws of electrical engineering," *COMPEL - The International Journal for Computation and Mathematics in Electrical and Electronic Engineering*, vol. 37, no. 4, pp. 1384–1391, 2018.
- [29] K. J. Latawiec, R. Stanisławski, M. Łukaniszyn, W. Czuczvara, and M. Rydel, "Fractional-order modeling of electric circuits: modern empiricism vs. classical science," in *Proceedings of the 2017*

- Progress in Applied Electrical Engineering (PAEE)*, (Kościelisko, Poland), pp. 1–4, 25–30 June 2017.
- [30] H. Emamirad and A. Rougirel, "Time-fractional schrödinger equation," *Journal of Evolution Equations*, 2019. Published online.
 - [31] C. Li and F. Zeng, *Numerical Methods for Fractional Calculus*. Boca Raton, FL, USA: Chapman and Hall/CRC, 2015.
 - [32] F. Ferrari, "Weyl and marchaud derivatives: A forgotten history," *Mathematics*, vol. 6, no. 1, p. 6, 2018.
 - [33] M. D. Ortigueira and J. Tenreiro Machado, "What is a fractional derivative?," *Journal of Computational Physics*, vol. 293, pp. 4–13, 2015.
 - [34] G. S. Teodoro, J. T. Machado, and E. C. de Oliveira, "A review of definitions of fractional derivatives and other operators," *Journal of Computational Physics*, vol. 388, pp. 195–208, 2019.
 - [35] E. C. de Oliveira and J. A. T. Machado, "A review of definitions for fractional derivatives and integral," *Mathematical Problems in Engineering*, vol. 2014, pp. 1–6, 2014.
 - [36] J. Gulowski and T. P. Stefański, "On applications of fractional derivatives in electromagnetic theory," in *2020 23rd International Conference on Microwave, Radar and Wireless Communications (MIKON)*, pp. 1–4, 2020.
 - [37] R. Sikora and S. Pawłowski, "On certain aspects of application of fractional derivatives in the electromagnetism," *Przegląd Elektrotechniczny*, vol. 94, no. 4, pp. 101–104, 2018.
 - [38] S. Bhalekar and M. Patil, "Can we split fractional derivative while analyzing fractional differential equations?," *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, vol. 76, pp. 12–24, 2019.
 - [39] R. Garrappa, E. Kaslik, and M. Popolizio, "Evaluation of fractional integrals and derivatives of elementary functions: Overview and tutorial," *Mathematics*, vol. 7, no. 5, p. 407, 2019.
 - [40] G. Shchedrin, N. C. Smith, A. Gladkina, and L. D. Carr, "Exact results for a fractional derivative of elementary functions," *SciPost Physics*, vol. 4, no. 4, p. 29, 2017.
 - [41] S. Rogosin and M. Dubatovskaya, "Letnikov vs. marchaud: A survey on two prominent constructions of fractional derivatives," *Mathematics*, vol. 6, no. 1, p. 3, 2018.
 - [42] M. D. Ortigueira, *Fractional Calculus for Scientists and Engineers*. Lecture Notes in Electrical Engineering, Berlin/Heidelberg, Germany: Springer, 2011.
 - [43] M. D. Ortigueira and J. T. Machado, "Fractional derivatives: The perspective of system theory," *Mathematics*, vol. 7, no. 2, p. 150, 2019.
 - [44] J. F. Gomez-Aguilar, "Fundamental solutions to electrical circuits of non-integer order via fractional derivatives with and without singular kernels," *The European Physical Journal Plus*, vol. 133, no. 2, p. 62, 2018.

- [45] V. E. Tarasov, "No nonlocality. no fractional derivative," *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, vol. 62, pp. 157–163, 2018.
- [46] V. E. Tarasov, "No violation of the leibniz rule. no fractional derivative," *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, vol. 18, no. 11, pp. 2945–2948, 2013.
- [47] M. D. Ortigueira and J. Tenreiro Machado, "A critical analysis of the caputo–fabrizio operator," *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, vol. 59, pp. 608–611, 2018.
- [48] J. Cresson and A. Szafrńska, "Comments on various extensions of the riemann—liouville fractional derivatives: About the leibniz and chain rule properties," *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, vol. 82, p. 104903, 2020.
- [49] M. Stynes, "Fractional-order derivatives defined by continuous kernels are too restrictive," *Applied Mathematics Letters*, vol. 85, pp. 22–26, 2018.
- [50] K. Diethelm, R. Garrappa, A. Giusti, and M. Stynes, "Why fractional derivatives with nonsingular kernels should not be used," *Fractional Calculus and Applied Analysis*, vol. 23, no. 3, pp. 610–634, 2020.
- [51] J. Sabatier, "Fractional-order derivatives defined by continuous kernels: Are they really too restrictive?," *Fractal and Fractional*, vol. 4, no. 3, p. 40, 2020.
- [52] T. Kaczorek, "Minimum energy control of fractional positive electrical circuits with bounded inputs," *Circuits, Systems, and Signal Processing*, vol. 35, no. 6, pp. 1815–1829, 2016.
- [53] J. R. Carson, "Electromagnetic theory and the foundations of electric circuit theory," *The Bell System Technical Journal*, vol. 6, pp. 1–17, Jan 1927.
- [54] H. A. Haus and J. R. Melcher, *Electromagnetic fields and energy*. Englewood Cliffs, N.J: Prentice Hall, 1989.
- [55] P. Russer, *Microwave Circuit, And Antenna Design for Communications Engineering*. Artech House Antennas and Propagation Library, Norwood, MA, USA: Artech House, Inc., second ed., 2006.
- [56] J. Osowski and J. Szabatin, *Fundamentals of Circuit Theory*. Warsaw: Scientific and Technical Publishing House, 1995.
- [57] G. Liang, J. Hao, and D. Shan, "Electromagnetic interpretation of fractional-order elements," *Journal of Modern Physics*, vol. 8, pp. 2209–2218, 2017.
- [58] M. A. Moreles and R. Lainez, "Mathematical modelling of fractional order circuit elements and bioimpedance applications," *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, vol. 46, pp. 81–88, 2017.
- [59] W. C. Gibson, *The Method of Moments in Electromagnetics*. CRC Press, 2014.
- [60] D. Trofimowicz, T. Stefański, J. Gulgowski, and T. Talaśka, "Modelling and simulations in time-fractional electrodynamics based on control engineering methods," *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, vol. 129, pp. 107720–, 2024.

- [61] K. Yee, "Numerical solution of initial boundary value problems involving Maxwell's equations in isotropic media," *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, vol. 14, pp. 302–307, 1966.
- [62] A. Taflov and S. C. Hagness, *Computational electrodynamics: the finite-difference time-domain method*. Artech House Publishers, 2005.
- [63] W. L. Brogan, *Modern Control Theory*. Prentice-Hall, Inc, 3rd ed., 1991.
- [64] R. J. Vaccaro, *Digital Control*. McGraw-Hill Higher Education, 1st ed., 1995.
- [65] L. Grzymkowski, D. Trofimowicz, and T. P. Stefański, "Stability analysis of interconnected discrete-time fractional-order LTI state-space systems," *International Journal of Applied Mathematics and Computer Science*, vol. 30, no. 4, pp. 649–658, 2020.
- [66] S. Westerlund, "Dead matter has memory!," *Physica Scripta*, vol. 43, pp. 174–179, 1991.
- [67] S. Westerlund and L. Ekstam, "Capacitor theory," *IEEE Transactions on Dielectrics and Electrical Insulation*, vol. 1, pp. 826–839, 1994.
- [68] M. J. Curie, "Recherches sur la conductibilité des corps cristallisés," *Annales de chimie et de physique*, vol. 18, pp. 203–269, 1889.
- [69] T. P. Stefański and J. Gulgowski, "Electromagnetic-based derivation of fractional-order circuit theory," *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, vol. 79, p. 104897, 2019.
- [70] I. Schäfer and K. Krüger, "Modelling of lossy coils using fractional derivatives," *Journal of Physics D: Applied Physics*, vol. 41, 2008.
- [71] T. P. Stefański and J. Gulgowski, "Fundamental properties of solutions to fractional-order Maxwell's equations," *Journal of Electromagnetic Waves and Applications*, vol. 34, pp. 1955–1976, 2020.
- [72] T. P. Stefański and J. Gulgowski, "Formulation of time-fractional electrodynamics based on Riemann-Silberstein vector," *Entropy*, vol. 23, 2021.
- [73] T. P. Stefański and J. Gulgowski, "Fractional order circuit elements derived from electromagnetism," in *2019 MIXDES - 26th International Conference Mixed Design of Integrated Circuits and Systems*, pp. 310–315, 2019.
- [74] M. A. Moreles and R. Lainez, "Mathematical modeling of fractional order circuit elements and bioimpedance applications," *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, vol. 46, pp. 81–88, 2017.
- [75] J. Gulgowski, T. P. Stefański, and D. Trofimowicz, "On applications of fractional derivatives in circuit theory," in *2020 27th International Conference on Mixed Design of Integrated Circuits and System (MIXDES)*, (Wrocław, Poland), pp. 160–163, 25–27 June 2020.
- [76] T. P. Stefański, D. Trofimowicz, and J. Gulgowski, "Simulation of signal propagation along fractional-order transmission lines," in *2020 27th International Conference on Mixed Design of Integrated Circuits and System (MIXDES)*, pp. 164–167, 2020.

- [77] Y. Shang, W. Fei, and H. Yu, "A fractional-order RLGC model for Terahertz transmission line," in *2013 IEEE MTT-S International Microwave Symposium Digest (MTT)*, (Seattle, WA, USA), pp. 1–3, 2–7 June 2013.
- [78] Y. Shang, H. Yu, and W. Fei, "Design and analysis of CMOS-based Terahertz integrated circuits by causal fractional-order RLGC transmission line model," *IEEE Journal on Emerging and Selected Topics in Circuits and Systems*, vol. 3, pp. 355–366, 2013.
- [79] J. F. Gómez-Aguilar and B. Dumitru, "Fractional transmission line with losses," *Zeitschrift für Naturforschung A*, vol. 69, pp. 539–546, 2014.
- [80] S. M. Cvetićanin, D. Zorica, and M. R. Rapaić, "Generalized time-fractional telegrapher's equation in transmission line modeling," *Nonlinear Dynamics*, vol. 88, pp. 1453–1472, 2017.
- [81] D. Trofimowicz, T. P. Stefański, P. Pietruszka, and J. Gulgowski, "Testing stability of fdtd in media described by time-fractional constitutive relations," in *2024 25th International Microwave and Radar Conference (MIKON)*, pp. 137–142, 2024.
- [82] D. Trofimowicz, T. P. Stefański, and J. Gulgowski, "Crank–nicolson fdtd method in media described by time-fractional constitutive relations," in *2024 18th European Conference on Antennas and Propagation (EuCAP)*, pp. 1–5, 2024.
- [83] A. V. Oppenheim and R. W. Schaffer, *Discrete-Time Signal Processing*. Prentice Hall Press, 3rd ed., 2009.
- [84] A. A. Chikrii and S. D. Eidel'man, "Generalized Mittag-Leffler matrix functions in game problems for evolutionary equations of fractional order," *Cybernetics and Systems Analysis*, vol. 36, 2000.
- [85] I. Matychyn and V. Onyshchenko, "Matrix Mittag-Leffler function in fractional systems and its computation," *Bulletin of the Polish Academy of Sciences: Technical Sciences*, vol. 66, 2018.
- [86] T. Kaczorek, *Selected problems of fractional systems theory*, vol. 411. Springer Science & Business Media, 2011.
- [87] T. P. Stefański and J. Gulgowski, "Signal propagation in electromagnetic media described by fractional-order models," *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, vol. 82, 2020.
- [88] R. Garrappa and M. Popolizio, "Computing the matrix Mittag-Leffler function with applications to fractional calculus," *Journal of Scientific Computing*, vol. 77, pp. 129–153, 2018.
- [89] I. Matychyn, "Matrix Mittag-Leffler function." <https://www.mathworks.com/matlabcentral/fileexchange/62790-matrix-mittag-leffler-function>, 2023. MATLAB Central File Exchange.
- [90] R. Garrappa, "The Mittag-Leffler function." <https://www.mathworks.com/matlabcentral/fileexchange/48154-the-mittag-leffler-function>, 2023. MATLAB Central File Exchange.

- [91] R. Garrappa, "Numerical evaluation of two and three parameter Mittag-Leffler functions," *SIAM Journal on Numerical Analysis*, vol. 53, pp. 1350–1369, 2015.
- [92] W. Yueh, "Eigenvalues of several tridiagonal matrices," *Applied Mathematics E-Notes*, vol. 5, 2005.
- [93] P. Pietruszka, T. Stefański, and J. Gulgowski, "FDTD method for electromagnetic simulations in media described by time-fractional constitutive relations," *Applied Sciences*, vol. 13, no. 19, p. 10654, 2023.
- [94] R. Courant, K. Friedrichs, and H. Lewy, "Über die partiellen differenzengleichungen der mathematischen physik," *Mathematische Annalen*, vol. 100, no. 1, pp. 32–74, 1928.
- [95] C. D. Sarris, "Extending the stability limit of the FDTD method with spatial filtering," *IEEE Microwave and Wireless Components Letters*, vol. 21, no. 4, pp. 176–178, 2011.
- [96] K. P. Prokopidis and D. C. Zografopoulos, "Investigation of the stability of ADE-FDTD methods for modified Lorentz media," *IEEE Microwave and Wireless Components Letters*, vol. 24, no. 10, pp. 659–661, 2014.
- [97] J. Park and K.-Y. Jung, "Numerical stability of modified lorentz fdtd unified from various dispersion models," *Opt. Express*, vol. 29, pp. 21639–21654, Jul 2021.
- [98] E. W. Weisstein, "Derivative." MathWorld—A Wolfram Web Resource, <https://mathworld.wolfram.com/Derivative.html>, 2023.
- [99] T. Wittig, R. Schuhmann, and T. Weiland, "Model order reduction for large systems in computational electromagnetics," *Linear Algebra and its Applications*, vol. 415, no. 2, pp. 499–530, 2006. Special Issue on Order Reduction of Large-Scale Systems.
- [100] S. B. Yuste and L. Acedo, "An explicit finite difference method and a new von Neumann-type stability analysis for fractional diffusion equations," *SIAM Journal on Numerical Analysis*, vol. 42, no. 5, pp. 1862–1874, 2005.
- [101] J. R. Silvester, "Determinants of block matrices," *The Mathematical Gazette*, vol. 84, no. 501, pp. 460–467, 2000.
- [102] D. Trofimowicz and T. P. Stefański, "Testing stability of digital filters using optimization methods with phase analysis," *Energies*, vol. 14, no. 5, p. 1488, 2021.
- [103] P. Kowalczyk, "Global complex roots and poles finding algorithm based on phase analysis for propagation and radiation problems," *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, vol. 66, no. 12, pp. 7198–7205, 2018.
- [104] E. W. Weisstein, "Finite difference." MathWorld—A Wolfram Web Resource, <https://mathworld.wolfram.com/FiniteDifference.html>, 2023.
- [105] Y. Yang, R. S. Chen, and E. K. N. Yung, "The unconditionally stable Crank-Nicolson FDTD method for three-dimensional Maxwell's equations," *Microwave and Optical Technology Letters*, vol. 48, no. 8, pp. 1619–1622, 2006.

- [106] U. Ali, F. A. Abdullah, and A. I. Ismail, "Crank-Nicolson finite difference method for two-dimensional fractional sub-diffusion equation," *Journal of Interpolation and Approximation in Scientific Computing*, no. 2, pp. 18–29, 2017.
- [107] L. Losonczi, "Eigenvalues and eigenvectors of some tridiagonal matrices," *Acta Mathematica Hungarica*, vol. 60, no. 3-4, pp. 309–332, 1992.

WYKAZ RYSUNKÓW

3.1	Siatka Yee.	31
3.2	System elektromagnetyczny z relacjami konstytutywnymi całkowitego rzędu, rozpatrywany jako połączenie dwóch systemów całkowitego rzędu związanych z równaniami rotacji pola elektrycznego i magnetycznego.	33
3.3	System elektromagnetyczny z relacjami konstytutywnymi ułamkowego rzędu, rozpatrywany jako połączenie dwóch systemów ułamkowego rzędu związanych z równaniami rotacji pola elektrycznego i magnetycznego.	37
3.4	Geometrie rozpatrywanych elementów obwodu. (a) Rezystor i kondensator. (b) Cewka. Rysunek zaczerpnięto z [73] za zgodą autorów.	38
3.5	Ścieżki całkowania dla rozpatrywanego kondensatora. Rysunek zaczerpnięto z [73] za zgodą autorów.	40
3.6	Ścieżki całkowania dla rozważanej cewki. Rysunek zaczerpnięto z [73] za zgodą autorów.	41
3.7	Komórka jednostkowa modelu linii transmisyjnej całkowitego rzędu.	43
3.8	Komórka jednostkowa modelu linii transmisyjnej ułamkowego rzędu.	43
3.9	Komórka jednostkowa rozważanej linii transmisyjnej RLGC ułamkowego rzędu.	44
4.1	Schemat symulacji propagacji sygnału wzdłuż linii transmisyjnej RLGC ułamkowego rzędu.	48
4.2	Odpowiedź impulsowa modelu linii transmisyjnej RLGC ułamkowego rzędu dla różnych pozycji x . (a) $\alpha = 1/4$, $\beta = \gamma = 2/3$, $a = 2\sqrt[3]{9}$, $b = 450$. (b) $\alpha = 5/6$, $\beta = \gamma = 2/3$, $a = 2\sqrt[3]{9}$, $b = 4.5$. (c) $\alpha = 5/6$, $\beta = \gamma = 2/3$, $a = 2\sqrt[3]{9}$, $b = 9$. (d) $\alpha = 5/6$, $\beta = \gamma = 2/3$, $a = 2\sqrt[3]{9}$, $b = 450$	49
4.3	Propagacja fali sinusoidalnej modulowanej funkcją Gaussa w ośrodku opisanym modelem ułamkowego rzędu. Sygnał mierzony w odległości $L = 10 \mu m$. (a) Sygnał pobudzenia. (b) $\nu = 1$ (próżnia). (c) $\nu = 0,995$. (d) $\nu = 0,99$. (e) $\nu = 0,98$. (f) $\nu = 0,97$. Wyniki przedstawiono dla opracowanej metody stosującej ZOH (–) i metody referencyjnej (- -), tj. obie linie nakładają się.	60
4.4	Propagacja impulsu trójkątnego w ośrodku opisanym modelem ułamkowego rzędu, gdzie $\gamma = 1$. Sygnał mierzony w odległości $L = 10 \mu m$. (a) Sygnał pobudzenia. (b) $\beta = 1$ (próżnia). (c) $\beta = 0,99$. (d) $\beta = 0,98$. (e) $\beta = 0,96$. (f) $\beta = 0,94$. Wyniki przedstawiono dla opracowanej metody ZOH (–) i metody referencyjnej (- -), tj. obie linie nakładają się.	62
4.5	Czas obliczeń dla generowania macierzy Mittaga-Lefflera w zależności od rozmiaru obszaru przestrzennego N_h . Kółka odpowiadają czasom zmierzonym na PC, linia ciągła to najlepiej dopasowany wielomian drugiego stopnia odpowiadający zmierzonym punktom.	63

4.6	Kwadranty fazy (■ Q_1 , ■ Q_2 , ■ Q_3 , ■ Q_4) dla funkcji $f(\nu)$ gdy $F_{CFL} = 1$ oraz $n = 20$. Okrąg jednostkowy oznaczono linią - -	71
4.7	Kwadranty fazy (■ Q_1 , ■ Q_2 , ■ Q_3 , ■ Q_4) dla funkcji $f(\nu)$ gdy $F_{CFL} = 1$ oraz $n = 100$. Okrąg jednostkowy oznaczono linią - -	71
4.8	Kwadranty fazy (■ Q_1 , ■ Q_2 , ■ Q_3 , ■ Q_4) dla funkcji $f(\nu)$ gdy $F_{CFL} = 16.3$ oraz $n \rightarrow +\infty$. Okrąg jednostkowy oznaczono linią - -	72
4.9	Kwadranty fazy (■ Q_1 , ■ Q_2 , ■ Q_3 , ■ Q_4) dla funkcji $f(\nu)$ gdy $F_{CFL} = 16.5$ oraz $n \rightarrow +\infty$. Okrąg jednostkowy oznaczono linią - -	72
4.10	Propagacja sinusoidalnego impulsu modulowanego funkcją Gaussa w ośrodku z relacjami konstytutywnymi ułamkowego rzędu. Sygnał jest mierzony w odległości $L = 10 \mu m$. (a) Sygnał pobudzenia. (b) $\nu = 1$ (próżnia). (c) $\nu = 0,995$. (d) $\nu = 0,99$. (e) $\nu = 0,98$. (f) $\nu = 0,97$. Wyniki przedstawiono dla opracowanej metody CN-FDTD (-) i metody referencyjnej (- -). Obie linie nakładają się na siebie.	76

WYKAZ TABEL

4.1	Maksymalny błąd względny pomiędzy metodą opartą na modelu ZOH i metodą referencyjną.	61
4.2	Maksymalny błąd względny pomiędzy metodą opartą na modelu ZOH i metodą referencyjną dla propagacji impulsu trójkątnego.	62

DODATEK A: OBLICZANIE FUNKCJI MITTAGA-LEFFLERA DLA ARGUMENTU MACIERZOWEGO

Rozważmy macierz $\mathbf{A}$ w przypadku jednowymiarowym (3.27), gdzie wektor pola elektrycznego $\mathbf{E}$ ma długość N_e , a wektor pola magnetycznego ma długość N_h . Wówczas $N = N_e + N_h$. Naturalne jest założenie, że $N_h = N_e + 1$. Wówczas dyskretne odpowiedniki $[\nabla \times]_D^E$ i $[\nabla \times]_D^H$ operatora rotacji dla pola elektrycznego i magnetycznego są równe odpowiednio $\frac{1}{\Delta z} \mathbf{P}$ i $\frac{1}{\Delta z} \mathbf{Q}$. Macierze $\mathbf{P}$ i $\mathbf{Q}$ są dane wzorami

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (1)$$

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \quad (2)$$

gdzie $\mathbf{P}$ ma rozmiar $N_h \times N_e$, a $\mathbf{Q}$ ma rozmiar $N_e \times N_h$. Wtedy

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{Q} \\ \mathbf{P} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad (3)$$

i można łatwo udowodnić, że dla $n = 0, 1, 2, \dots$

$$\mathbf{A}^{2n} = \begin{bmatrix} (\mathbf{QP})^n & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & (\mathbf{PQ})^n \end{bmatrix} \quad (4)$$

oraz

$$\mathbf{A}^{2n+1} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{Q}(\mathbf{PQ})^n \\ (\mathbf{PQ})^n \mathbf{P} & \mathbf{0} \end{bmatrix}. \quad (5)$$

Co prowadzi do

$$\begin{aligned} E_{\alpha, \beta}(\tau \mathbf{A}) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\tau^k \mathbf{A}^k}{\Gamma(\alpha k + \beta)} = \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\tau^{2k} \mathbf{A}^{2k}}{\Gamma(2\alpha k + \beta)} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\tau^{2k+1} \mathbf{A}^{2k+1}}{\Gamma(2\alpha k + \alpha + \beta)} = \end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} E_{2\alpha,\beta}(\tau^2 \mathbf{QP}) & \tau \mathbf{Q} E_{2\alpha,\alpha+\beta}(\tau^2 \mathbf{PQ}) \\ \tau E_{2\alpha,\alpha+\beta}(\tau^2 \mathbf{PQ}) \cdot \mathbf{P} & E_{2\alpha,\beta}(\tau^2 \mathbf{PQ}) \end{bmatrix}. \quad (6)$$

Macierze $\mathbf{A}_{12}$ i $\mathbf{A}_{21}$ w (4.25) i (4.26) spełniają relacje $\mathbf{A}_{12} = \frac{1}{\epsilon_\beta \Delta z} \mathbf{Q}$ i $\mathbf{A}_{21} = -\frac{1}{\mu_\gamma \Delta z} \mathbf{P}$. Oznacza to, że macierze podane przez (4.27) i (4.28) spełniają

$$\mathbf{C} = -\frac{1}{\mu_\gamma \epsilon_\beta (\Delta z)^2} \mathbf{QP} \quad (7)$$

$$\mathbf{D} = -\frac{1}{\mu_\gamma \epsilon_\beta (\Delta z)^2} \mathbf{PQ}. \quad (8)$$

Jak można zauważyć, obliczenie funkcji macierzowej Mittag-Lefflera dla $\beta = \gamma$ w praktyce następuje po wyprowadzeniu (6). Oznacza to, że wystarczy obliczyć funkcje Mittag-Lefflera tylko dla macierzy kwadratowych $\xi \mathbf{PQ}$ i $\xi \mathbf{QP}$ dla odpowiedniego skłara $\xi \in \mathbb{R}$. Widać, że macierze te są trójdzielne i podane wzorem

$$\mathbf{PQ} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \quad (9)$$

$$\mathbf{QP} = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & -2 \end{bmatrix}. \quad (10)$$

Jeśli chodzi o diagonalizację tych macierzy, przypadek macierzy $\mathbf{PQ}$ jest omówiony w twierdzeniu 5 w [92], natomiast przypadek $\mathbf{QP}$ jest opisany na początku rozdziału 3 w tym samym artykule.

Ciekawostką jest to, że można ograniczyć się do rozważań funkcji Mittag-Lefflera macierzy $\mathbf{PQ}$, ponieważ funkcję macierzy $\mathbf{QP}$ można zapisać następująco:

$$E_{2\alpha,\beta}(\xi \mathbf{QP}) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\xi^k (\mathbf{QP})^k}{\Gamma(2\alpha k + \beta)} = \quad (11)$$

$$\frac{\mathbf{I}}{\Gamma(\beta)} + \mathbf{Q} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(\mathbf{PQ})^{k-1}}{\Gamma(2\alpha(k-1) + 2\alpha + \beta)} \cdot \mathbf{P} = \frac{\mathbf{I}}{\Gamma(\beta)} + \mathbf{Q} E_{2\alpha, 2\alpha+\beta}(\mathbf{PQ}) \cdot \mathbf{P}.$$

Zatem funkcję Mittag-Lefflera macierzy $\mathbf{A}$ można wyrazić za pomocą funkcji Mittag-Lefflera macierzy $\mathbf{PQ}$, gdzie ξ jest skłarem zależnym od τ .

Na podstawie twierdzenia 6 w [107], wartości własne macierzy $\mathbf{PQ}$ o rozmiarze $n \times n$ (patrz wzór (9)) są dane wzorem

$$\lambda_k = -2 + 2 \cos \left(\frac{k-1}{n} \pi \right) \quad (12)$$

gdzie $k = 1, \dots, n$. Z drugiej strony wektor własny odpowiadający k -tej wartości własnej λ_k jest dany wzorem

$$u_k = \left(\cos\left(\frac{1}{2}(k-1)\frac{\pi}{n}\right), \cos\left(\frac{3}{2}(k-1)\frac{\pi}{n}\right), \dots, \cos\left(\frac{2n-1}{2}(k-1)\frac{\pi}{n}\right) \right). \quad (13)$$

W ten sposób uzyskuje się reprezentację

$$\mathbf{PQ} = \mathbf{T} \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \mathbf{T}^{-1}$$

gdzie kolumny macierzy $\mathbf{T}$ są znormalizowanymi wektorami własnymi. Oznacza to, że aby obliczyć funkcję Mittaga-Lefflera macierzy $\xi \mathbf{PQ}$ dla $\xi \in \mathbb{R}$, wystarczy obliczyć funkcję Mittaga-Lefflera macierzy diagonalnej $\text{diag}(\xi \lambda_1, \dots, \xi \lambda_n)$. Dzieje się tak, ponieważ, jak można łatwo sprawdzić,

$$E_{\alpha, \beta}(\xi \mathbf{PQ}) = \mathbf{T} E_{\alpha, \beta}(\text{diag}(\xi \lambda_1, \dots, \xi \lambda_n)) \mathbf{T}^{-1}. \quad (14)$$

Z drugiej strony, aby obliczyć funkcję Mittaga-Lefflera macierzy diagonalnej, wystarczy zastosować funkcję Mittaga-Lefflera ważną dla liczb rzeczywistych, do argumentów na przekątnej macierzy, wyraz po wyrazie. Stąd można wykorzystać implementację funkcji Mittaga-Lefflera w środowisku Matlab [90], dla argumentów rzeczywistych.

Rozważmy przygotowanie wektora wejściowego, tj. prądów zasilających układ. Porównajmy proponowany algorytm z metodą zaimplementowaną wcześniej dla problemu sygnalizacji, która wymaga wartości pola elektrycznego w danym punkcie $E(0, t) = h(t)$ wymuszonego dla wszystkich momentów czasu przez daną funkcję $h(t)$. Patrząc na wzór (3.7), można równoważnie powiedzieć, że $M_s(0, t) = \frac{1}{\Delta z} h(t)$, a ten prąd magnetyczny jest używany jako wektor wejściowy $\mathbf{u}(t)$ do układu. Ponieważ wektor $\mathbf{u}(t)$ zawiera w rzeczywistości tylko jedną współrzędną niezerową, nie jest konieczne obliczanie całej macierzy $\mathbf{B}$ i całej macierzy $E_{\beta, \beta+1}(n^\beta T^\beta \mathbf{A})$ we wzorze (4.57), a jedynie jednej kolumny tej macierzy. Oszczędza to dużo zasobów obliczeniowych pod względem pamięci i czasu obliczeń.

W symulacjach wielowymiarowych dyskretne odpowiedniki $[\nabla \times]_D^E$ i $[\nabla \times]_D^H$ operatora rotacji dla pól elektrycznego i magnetycznego są znacznie bardziej skomplikowane niż w przypadku jednowymiarowym. Dlatego operatorów tych nie można przedstawić za pomocą macierzy dwudiagonalnych, a ich iloczyn nie musi być macierzą trójdziagonalną. Nie znamy w literaturze żadnych ogólnych wyników dotyczących wartości i wektorów własnych macierzy $[\nabla \times]_D^E$ i $[\nabla \times]_D^H$. Oznacza to, że nie istnieją uproszczone metody uzyskiwania funkcji macierzowej Mittaga-Lefflera w sposób przedstawiony powyżej. Oznacza to, że proponowana metoda wymagałaby dodatkowego kroku obliczeniowego w celu znalezienia wartości i wektorów własnych macierzy $\mathbf{A}$ w symulacjach wielowymiarowych. Można się spodziewać, że ten krok będzie trudny obliczeniowo.